مكيد علي

بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية

الجزء الثاني – نظرية الشبكات ومسائل النقل والتخصيص –

دروس ومسائل محلولة



ديوان المطبوعات الجامعية

الكتب الصادرة عن ديوان المطبوعات الجامعية لنفس المؤلف:

- الإقتصاد القياسي دروس ومسائل محلولة.............................. ماي 2005
- بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية.................................سبتمبر 2015

رقم النشر:4.01.5628
رقم ر.د.م.ك (ISBN) :978-9961-0-1879-8
رقم الإيداع القانوني: السداسي الأول 2016

الفهرس

مقدمة

يمثل هذا الكتاب محاولة متواضعة لتنويع المراجع العلمية باللغة الوطنية وإتاحة المزيد من الفرص لأساتذة وطلبة العلوم الاقتصادية والتجارية عامة والمختصين منهم في ميدان الاقتصاد الكمي خاصة للإلمام بالمواضيع المدرجة في هذا الكتاب وتعميق فهمهم وإدراكهم لمحتوياته.

هذا الكتاب موجه أيضا إلى المسيرين والعاملين في المجال الإداري لتعريفهم بأدوات وتقنيات المعالجة الكمية للمسائل الاقتصادية وتحسيسهم بأهميتها وفوائدها في مجالات اتخاذ القرار وتقدير الآثار الناجمة عن تلك القرارات.

لا شك أن سعي المؤسسة الاقتصادية المستمر إلى تحسين مستوى أدائها يتطلب في جزء كبير منه العمل على تحسين مستوى فعالية وكفاءة نشاط إطاراتها، سواء المسؤولين منهم على اتخاذ القرار أو الذين يعملون على تحضير وإعداد تلك القرارات، ومن هذا المنظور فإن عصرنة أدوات العمل الإداري يساهم لا محالة في تحقيق هذا الهدف.

إن هذا الكتاب هو الجزء الثاني الصادر في منهاج بحوث العمليات، حيث تم إصدار الجزء الأول- الذي تم تخصيصه لطرق ونماذج البرمجة الرياضية -.

لقد توخينا في إعداد هذا الكتاب التبسيط والابتعاد قدر الإمكان عن التجريد والمعالجة النظرية المفرطة، كما لجأنا إلى استعمال عدد كبير من الأمثلة

والمسائل المحلولة، وكل ذلك بهدف تقريب القارئ والمهتم من هذا الميدان من العلوم الاقتصادية وترغيبه على الاهتمام به ودراسته بغية الاستفادة منه.

يشتمل هذا الكتاب على مواضيع أساسية في بحوث العمليات، حيث احتوى الفصل الأول على مسألة النقل، وفيه تم التطرق إلى حالة النموذج المغلق في القسم الأول، المبحث الأول من هذا القسم خصصناه لعرض طريقة الزاوية الشمالية الغربية، في المبحث الثاني تعرضنا إلى طريقة التكاليف الصغرى، أما في المبحث الثالث فتطرقنا إلى طريقة الفروقات الكبرى. ختمنا هذا الفصل بالقسم الثاني الذي يعنى بحالة نموذج النقل المفتوح.

الفصل الثاني من هذا الكتاب يتناول مسألة التخصيص، حيث تم تخصيص المبحث الأول لعرض حالة تدنية دالة الهدف لهذه المسألة وطرق معالجتها، ثم أوردنا في المبحث الثاني طرق معالجة حالة تعظيم دالة الهدف لهذه المسألة، أما المبحث الثالث فيتناول الحالات الخاصة لمسألة التخصيص.

الفصل الثالث يحتوي على عرض مستفيض لنظرية الشبكات وتطبيقاتها المختلفة، حيث تم تخصيص القسم الأول لشبكات النقل، وفيه يجد الطالب عرضا مبسطا ووافيا لطرق تحديد المسارات ذات القيمة المثلى عبر شبكة، وفي المبحث الثاني طرق حساب التدفق الأعظم عبر شبكة، أما القسم الثاني من هذا الفصل فيتناول حالة شبكات الأعمال، حيث يتعرض المبحث الأول منه لطريقة مراقبة ومراجعة تنفيذ المشاريع (**PERT/CPM**) ونختم هذا الفصل بالمبحث الثاني الذي يتناول طريقة الإمكانات (**M. des Potentiels**).

أسأل الله التوفيق والقبول.

مكيد علي

الفصل الأول

مسألة النقل le Problème de Transport

القسم الأول

حالة العرض = الطلب (النموذج المغلق)

مشكلة النقل هي مشكلة خاصة من مسائل البرمجة الخطية، ولهذا فهي تتطلب طرقا خاصة لحلها وسوف نوضح الخصائص العامة لهذه المسألة عبر المثال التالي:

نفرض وجود عدد (n) من الأماكن (مخازن، موانئ، أسواق، أو غيرها) موجود فيها منتج معين، وكل مخزن (B_j) توجد فيه كمية من المنتجات مقدارها (b_j) (بالكغ، طن، متر، أو غيره)، بحيث ($j=1,2,....,n$). نريد نقل هذا المنتج إلى عدد (m) من المستعملين الذين يريدون الحصول على هذا المنتج لإشباع حاجاتهم سواء الإنتاجية أو الاستهلاكية. وكل مستعمل (A_i) يحتاج إلى كمية مقدارها (a_i) من هذا المنتج بحيث: ($i=1,2,...,m$).

نفرض أن تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتج المذكور هي (C) فتكون إذن (C_{ij}) هي تكلفة نقل كل وحدة من هذا المنتج من عند كل مخزن (B_j) إلى كل مستعمل (A_i).

المشكل المطروح أمامنا هو: تحديد شبكة (طرق) نقل هذا المنتج من المخازن المعطاة إلى المستهلكين المذكورين بأقل تكلفة ممكنة، أو بعبارة أخرى تحديد أرخص شبكة (طرق) نقل هذا المنتج من عند المخازن إلى المستعملين.

نستطيع أن نلخص المعطيات الأولية لهذه المشكلة كالتالي:

		المخازن (B_j) والكمية المتوفرة لديهم (b_i)
		$B_1(b_1)$ $B_2(b_2)$ .... $B_n(b_n)$
المستعملين (A_i) والكمية المطلوبة من طرفهم (a_i)	A_1 (a_1) A_2 (a_2) .... A_m (a_m)	C_{11} C_{12} .... C_{1n} C_{21} C_{22} .... C_{2n} .... C_{m1} C_{m2} .... C_{mn}

فمثلا: C_{11} هي تكلفة نقل كل وحدة من المنتج من المخزن (B_1) إلى المستعمل (A_1)، C_{12}: هي تكلفة نقل الوحدة من المخزن (B_2) إلى المستعمل (A_1) أما C_{1n} فهي تكلفة نقل الوحدة من المخزن (B_n) إلى المستعمل (A_1). الجدول السابق نسميه بمصفوفة التكلفة الأحادية.

إذا ما رمزنا للكمية التي يجب نقلها من المخزن (B_j) إلى كل مستعمل (A_i) بـ(X_{ij})، وافترضنا أن كل الكميات المتاحة لدى المخازن تساوي كل الكميات المطلوبة من طرف كل المستعملين. أو بعبارة أوضح يلزم أن يوزع كل مخزن كل ما عنده، وكل مستعمل يستلم كل ما يحتاجه من هذا المنتج، أي أن العرض الكلي يساوي الطلب الكلي:

$\sum_{i=1}^{m} ai=\sum_{j=1}^{n} bj$

$\sum_{i=1}^{m} Xij = b_j$, (j=1,..,n)

$\sum_{j=1}^{n} Xij = a_i$, (i=1,..,m)

$X_{ij} \geq 0$

فإن جدول الكميات المنقولة من عند المصادر أو المنابع إلى المستعملين يكون:

X_{11}	X_{12}	X_{13}	....	X_{1n}	$= a_1$
X_{21}	X_{22}	X_{23}	....	X_{2n}	$= a_2$
......	......	....			....
X_{m1}	X_{m2}	X_{m3}	....	X_{mn}	$= a_m$
$= b_1$	$= b_2$	$= b_3$	....	$= b_n$	

إذن تكون تكلفة نقل الكمية (X_{ij}) من المخزن (j) إلى المستعمل (i) هي ($C_{ij}X_{ij}$)، **فمثلا**: $C_{23}\ X_{23}$: تعني تكلفة نقل الكمية (X) من المخزن الثالث إلى المستعمل الثاني. وتكون تكلفة نقل الكميات من المنتج التي يحتاجها مستعمل واحد (A_i) من كل المخازن هي: $\sum_{i=1}^{m} Cij\ Xij$، وتكون التكلفة الكلية لنقل كل الكميات من المنتج المذكورين من كل المخازن إلى كل المستعملين هي: $Z_n = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} Cij\ Xij$.

ويكون إذن المشكل المطلوب حله هو إيجاد أقل تكلفة نقل كلية ممكنة لهذا المنتج، أو بمعنى آخر إيجاد أرخص شبكة نقل ممكنة بين كل المخازن (B_j) وكل المستعملين (A_i) التي تجعل التكلفة الكلية للنقل أقل ما يمكن، وهذا يتطلب إيجاد قيم الكميات التي يجب نقلها (X_{ij}) التي تجعل دالة الهدف $Z_n = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} Cij\ Xij$ أقل ما يمكن، في ظل القيود الفنية التالية:

$X_{11} + X_{12} + ... + X_{1n} = a_1$
$X_{21} + X_{22} + ... + X_{2n} = a_2$
....
$X_{m1} + X_{m2} + ... + X_{mn} = a_m$

$X_{11} + X_{21} + ... + X_{m1} = b_1$
$X_{12} + X_{22} + ... + X_{m2} = b_2$
....
$X_{1n} + X_{2n} + ... + X_{mn} = b_j$

$\sum a_i = \sum b_j$

$X_{ij} \geq 0$

من أجل حل مسألة النقل كما هي مطروحة أعلاه، نستطيع مبدئيا استعمال طريقة الـ Simplex، ولكن نظرا لأن هذا سوف يعطينا جدولا كبيرا ومعقدا يصعب التعامل مع الأرقام الموجودة فيه، فعادة ما تستعمل طرق أخرى أكثر سهولة، ولكن بنفس مبادئ طريقة السمبلكس: أي إيجاد حل قاعدي أو ابتدائي، ثم محاولة تحسين هذا الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل. هناك عدة طرق تمكننا من إيجاد الحل الابتدائي وسوف نتعرض لثلاثة منهم، وأخرى تسمح بإيجاد الحل الأمثل ونوضح اثنتان منها.

في ما يتعلق بالمرحلة الأولى من الحل والمتعلقة **بالحل الابتدائي** فسيتم استعمال الطرق التالية:

طريقة الزاوية الشمالية الغربية **-CNO-** (وهي من أقدم الطرق)، طريقة التكاليف الصغرى **-MMC-** بالإضافة إلى طريقة الفروقات الكبرى - طريقة **R.W. Fogel**-.

أما في المرحلة الثانية من الحل (مرحلة البحث عن **الحل الأمثل**) فسوف نستعمل طريقة التجريب **méthode de stepping-stone**، وطريقة التحويل (**m. des transferts**).

المبحث الأول

طريقة الزاوية الشمالية الغربية (اليسار العلوي)

تستعمل هذه الطريقة في إيجاد الحل الابتدائي أو القاعدي لمسألة النقل.

أ- يبدأ الحل حسب هذه الطريقة بوضع جدول للحل يتكون من (n) عمود و(m) صف على حسب عدد المخازن (المصادر أو المنابع) وعدد المستعملين للمنتج المراد نقله. ملء هذا الجدول يتمثل في تلبية طلب المستعملين للمنتج وذلك ابتداء من الخانة (الزاوية) الشمالية الغربية (أي طريق النقل الذي يقع في الشمال وإلى الغرب في جدول النقل) أي ذلك المخصص لنقل الكمية (X_{11}). هذه الزاوية أو الخانة توضع فيها قيمة لـ(X_{ij}) = أقل الكميتين (a_i) أو (b_j) التي تقابلها (أي أقل قيم a_i أو b_j التي تقع على العمود أو السطر المقابلين للخانة المذكورة).

مثلا: $X_{11} = \min (a_1 ,b_1)$.

ب- ثم بعد ذلك قيمة (a_1) نعوضها بالقيمة $X_{11} - a_1 = a'_1$، وقيمة b_1 نعوضها بالقيمة $X_{11} - b_1 = b'_1$.

ج- وهكذا نذهب إلى الخانة الشمالية الغربية الموالية، ونكرر نفس العملية إلى أن تشبع كل احتياجات المستعملين وتستهلك كل المخزونات أي تصبح: ($b_i = 0,$ $a_i = 0$)، ونكون عندئذ قد حصلنا على حل يسمى بالحل القاعدي أو الابتدائي.

من شروط الوصول إلى حل **ابتدائي مقبول** هو أن يكون في جدول النقل المحصل عليه بعد الحل الابتدائي عدد طرق النقل المستخدمة لنقل المنتج يساوي عدد المصادر (المخازن) + عدد نقاط الوصول (المستعملين) - 1، أي: $m + n - 1$.

نلاحظ أنه عند شحن كل طريق نقل (ملء كل خانة ij)، يلزم أن نحصل

إما على: $a'_i = 0$ أو $b'_j = 0$ أو $a'_i = b'_j = 0$.

لأنه إذا كانت $b_j > a_i$ أو (الكمية المتوفرة) < (الكمية المطلوبة)، فإن:

$$\mathbf{X_{ij} = min\ (a_i\ ,b_j) = a_i}$$

$$\mathbf{a_i < b_j \rightarrow a'_i = a_i - a_j = 0}$$

$$\mathbf{b'_j = b_j - a_i > 0}$$

وإذا كانت $b_j < a_i$ فإن:

$$\mathbf{X_{ij} = min\ (a_i\ ,b_j) = b_j}$$

$$\mathbf{a_i > b_j \rightarrow a'_i = a_i - b_j > 0}$$

$$\mathbf{b'_j = b_j - b_j = 0}$$

وإذا كانت $b_j = a_i$ فإن:

$$\mathbf{X_{ij} = min\ (a_i\ ,b_j) = a_i = b_i}$$

$$\mathbf{a_i = b_i \rightarrow a'_i = a_i - a_i = 0}$$

$$\mathbf{b'_j = b_j - b_i = 0}$$

مثال: تتخصص مؤسسة النصر في إنتاج البراغي، تتمركز وحداتها الإنتاجية في مدن بسكرة (B_1)، سعيدة (B_2) ومسيلة (B_3). أهم زبائنها لتجارة الجملة موجودون في مدن الشلف (A_1)، ورقلة (A_2) وتلمسان (A_3). الجدول التالي يعطي تكلفة نقل الوحدة من المنتج المذكور من الوحدة الإنتاجية (B_j) إلى تجار الجملة (A_i) بحيث ($i=1,2,3$) و($j=1,2,3$)، ويعطينا كذلك الكميات المتوفرة عند كل وحدة إنتاجية والكميات المطلوبة من طرف كل مستعمل. المطلوب إيجاد الكميات (X_{ij}) اللازم نقلها من عند كل وحدة إنتاجية إلى كل تاجر جملة بحيث تكون تكلفة النقل الكلية أقل ما يمكن.

	B_1	B_2	B_3	
A_1	3	2	4	25
A_2	1	4	3	30
A_3	4	2	5	35
	20	50	20	90 \ 90

الكميات المطلوبة

الكميات المتوفرة أو المتاحة في المخازن

1– البحث عن الحل الابتدائي:

نتأكد أولا من أن مجموع الكميات المعروضة من طرف الوحدات الإنتاجية والكميات المطلوبة من طرف المتعاملين التجاريين هي متساوية وكلاهما يساوي 90 وحدة.

إذا ما استعمالنا طريقة الزاوية الشمالية الغربية أو العلوية إلى اليسار، فإننا نبدأ هذا الحل بوضع جدول للحل يتكون من ثلاث أعمدة حسب عدد الوحدات الإنتاجية بحيث يخصص عمود لكل وحدة إنتاجية، وثلاث صفوف أيضا = عدد المستعملين. لكي نملأ هذا الجدول، نأخذ الخانة الشمالية الغربية (طريق النقل الذي يقع في الشمال الغربي)، بمعنى طريق النقل الذي يجمع الوحدة الإنتاجية (a_1) بالمتعامل التجاري (b_1) ونجري العمليات المطلوبة في القواعد أ ب ج السابق الإشارة إليها.

نختار إذن الخانة (1,1) في الجدول الفارغ ونملأها بأقل القيمتين a_1=25 أو b_1 = 20، فنضع فيها إذن الكمية 20 وهي قيمة b_1 وهذا يعني أن قيمة X_{11}= 20، فتصبح:

$a'_1 = a_1 - X_{11} = 5$ و $b'_1 = b_1 - X_{11} = 0$ نلاحظ أن الكمية المقابلة للعمود الأول (الكمية المتاحة لوحدة الإنتاج الأولى) قد استهلكت كلها، بمعنى أن كل المتاح من المنتوج في مخازن وحدة الإنتاج الأولى (b_1) قد وزع كله وبالتالي فإن هذه الوحدة قد استنفذت كل مخزونها، الذي سلمته للمتعامل (a_1).على إثر هذا نشطب العمود الأول على أساس أن الوحدة ج. الأولى قد استنفذت كل مخزونها ولن تشارك بعد هذا في عمليات التوزيع اللاحق، وتصبح الخانة الشمالية الغربية الآن هي طريق النقل الذي يجمع الوحدة الإنتاجية (a_1) بالمتعامل التجاري (b_2)، (جدول I).

جدول –I–

20	**X**		**5**
			30
			35
0	**50**	**20**	

نلاحظ الآن أن قيمة $a'_1 = 5$ و $b_2 = 50$ هما الكميتان المقابلتان لطريق النقل (a_1b_2)، فنضع في هذا الطريق الكمية (X_{12}) التي تساوي 5 وحدات. الآن السطر الأول استهلك بالكامل، بمعنى أن كل احتياجات المستعمل الأول (a_1) قد أشبعت من طرف الوحدات (b_1) و (b_2) والخانة الغربية الشمالية الآن هي (a_2 ,b_2) أنظر الجدول II.

جدول –II–

20	**5**		**0**
	X		**30**
			35
0	**45**	**20**	

نجري عمليات مشابهة للعمليات السابقة فنحصل على الجدول IV.

جدول -IV-

	5		0
	30		0
	X		35
0	15	20	

الكميات المقابلة للسطر 1 و2 والعمود 1 كلها استنفذت، والخانة الغربية الشمالية الآن هي $(a_3،b_2)$.

نجري العمليات المطلوبة فنحصل على الجدول V.

جدول -V-

20	5		0
	30		0
	15	X	20
0	0	20	

استنفذ إلى حد الآن الكميات المقابلة للسطرين 1،2 والعمودين 1،2. وبقي طريق النقل الذي يجمع بين $(b_3،a_3)$. بإجراء العمليات المطلوبة نحصل على الجدول VI.

جدول -VI-

20	5		0
	30		0
	15	20	0
0	0	0	

هذا هو الحل الابتدائي (la solution de base)، وفيه عدد طرق النقل المستعملة = 5،وهي تساوي العدد المطلوب حسب المقيــاس (1-n+ m=1-3+3). إذن فهذا الحل الابتدائي مقبول.

نضيف إلى الجدول السابق (جدول VI) التكلفة الأحادية للنقل المناسبة فنحصل على الجدول التالي:

	B_1	B_2	B_3	
25	3 / 20	2 / 5	4 / 0	A_1
30	1 / 0	4 / 30	3 / 0	A_2
35	4 / 0	2 / 15	5 / 20	A_3
	20	50	20	

نضرب كل الكميات المنقولة عبر طرق النقل المحصل عليها في الحل الابتدائي في تكاليف النقل الأحادية فنحصل على التكلفة الكلية للحل الابتدائي وهي:

20. 3 + 5. 2 + 30. 4 + 20. 5 + 15. 2 = 320 و.ن.

هذه هي التكلفة الكلية **الدنيا** للنقل في المرحلة الحالية، التي تمكننا من نقل الكميات المطلوبة من عند الوحدات الإنتاجية إلى الوحدات التجارية بأقل تكلفة، والتي تتمثل في نقل الكمية 20 وحدة من عند (b_1) إلى (a_1) و5 وحدات من عند (b_2) إلى (a_1) وكذلك 30 وحدة من عند (b_2) إلى (a_2)، 15 وحدة من عند (b_2) إلى (a_3) وأخيرا 20 وحدة من عند (b_3) إلى (a_3). هل هذه هي أرخص شبكة للنقل التي تمكننا من نقل الكميات المطلوبة من الوحدات الإنتاجية إلى المؤسسات التجارية أم لا.

في الحقيقة لا يمكننا الجزم بذلك ويجب علينا البحث عن إمكانيات تخفيض هذه التكلفة إلى مستوى أدنى من المستوى الحالي إذاكان ذلك ممكنا. إن عملية البحث عن حل أحسن من الحل الحالي تعني البحث عن الحل الأمثل.

2- تحسين الحل الابتدائي وإيجاد الحل الأمثل:

سوف نتعرض لطريقتين لإيجاد الحل الأمثل، سنستخدم أولا طريقة التجريب (طريقة **stepping-stone**) ثم نوضح في ما بعد خطوات الحل بالطريقة الثانية (طريقة التحويل).

طريقة التجريب:

محتوى هذه الطريقة يتمثل في أننا نجرب كل طرق النقل غير المستعملة في الحل الابتدائي وذلك بإدخالها إلى شبكة النقل واحدة بعد الأخرى ونرى مدى

تأثيرها على تخفيض التكلفة الكلية للنقل المحصل عليها في الحل الابتدائي. هذه الطريقة تعتمد على التجريب والشيء الأساسي فيها هو ضرورة احترام الترتيب في عملية التجريب، بمعنى أنه عند تجريب طرق النقل غير المستعملة في الحل الابتدائي يجب الانطلاق من اليمين إلى اليسار دائما أو العكس كذلك دائما.

أ –نختبر طريق النقل غير المستعمل الذي يجمع بين (**A_1**) و(**B_3**): المستعمل (A_1) يحتاج إلى 25 وحدة و(B_3) لديه 20 وحدة فقط، فيزوده بها وذلك باسترجاعها من عند (A_3) أما (B_3) عندما يزود الآن (A_1) باحتياجاته فيصبح الآن يتحمل تكلفة نقل هذه الكمية إلى (A_1) والتي تساوي (4 و.ن للوحدة)، وبالمقابل يتخلص من تكلفة نقل كان يدفعها سابقا إلى (A_3) والتي كانت تساوي (5 و.ن للوحدة). الآن (A_1) أصبح يتلقى في المجموع 45 وحدة وهو يحتاج 25 وحدة فقط أما (A_3) فلا يحصل الآن إلا على 15 وحدة وهو يحتاج 35 وحدة، وهذا يتسبب في اختلال توازن الكميات التي يتحصل عليها كلاهما. لذلك فإن (A_1) عندما أصبح يتزود الآن من عند (B_3) بمقدار (20 وحدة) من المنتوج يجب أن يتخلى عن نفس الكمية التي كان يتلقاها إما من عند (B_1) أو من عند (B_2) لصالح (A_3). أي يجب على (A_1) أن يعوض لـ (A_3) نفس الكمية عن طريق (B_1) أو عن طريق (B_2) أو كليهما.

ولكن نلاحظ أن (B_2) لا تستطيع أن تعوض لـ (A_3) من عند (A_1) إلا الكمية (5). بينما (B_1) لا يمكنه تعويض (A_3) من عند (A_1) لأن هذا الطريق غير ممكن (غير مستعمل أصلا). إذن فـ (B_3) لا يستطيع تزويد (A_1) إلا بخمس وحدات

على أساس أن (A_1) تعوض لـ (A_3) أيضا 5 وحدات من عند (B_2)، هذه هي الكمية التي يمكن تبادلها فقط بين (A_1) و(A_3).

(B_2) عندما تعطي الـ (5 وحدات) لـ (A_3) من عند (A_1) فإنها تصبح تتحمل تكاليف نقل جديدة إلى (A_3) والتي تساوي 2 وحدة نقدية للوحدة، وتتخلص من تكلفة نقلها إلى (A_1) والتي كانت تساوي 2 و.ن/للوحدة أيضا.

نلاحظ أن إدخال هذا الطريق الجديد إلى شبكة النقل أدى إلى انخفاض في تكلفة النقل بمقدار وحدة نقدية واحدة لكل وحدة منتوج منقولة (‎-5 + 4 - 2 + 2 = 1-)، هذا يعني أن إدخال الطريق الجديد إلى شبكة النقل المحصل عليها سابقا في الحل الابتدائي ساهم في تخفيض تكلفة نقل الوحدة بـ (1 و.ن) عما كان عليه سابقا.

والتخفيض الكلي في تكلفة نقل الـ 5 وحدات = 5 و.ن.، أي انخفاض التكلفة الكلية للنقل بمقدار (5 و.ن). وتصبح التكلفة الإجمالية للشبكة الجديدة الآن هي: 320 - 5 = 315 و.ن.

وما دمنا نبحث عن تخفيض تكاليف النقل إلى أدنى حد ممكن، فمعنى هذا أن هناك تحسن في الحل الابتدائي نتيجة لإدخال هذا الطريق إلى شبكة النقل السابقة والتخلص من طريق النقل الذي يجمع بين (B_2) و(A_1). وتصبح شبكة النقل الجديدة هي:

	B_1	B_2	B_3	
25	3 / 20	2 / 0	4 / 5	A_1
30	1 / 0	4 / 30	3 / 0	A_2
35	4 / 0	2 / 20	5 / 15	A_3
	20	50	20	

ب- نجرب الطريق (B_2, A_1). نجرب الطرق غير المستخدمة من جديد، وذلك باحترام الترتيب من اليمين إلى اليسار الذي اعتمدناه في البداية. (A_1) تحتاج إلى (25 وحدة)، (B_2)كانت عندها (50 وحدة)، فيجب أن تزودها بالـ (25 وحدة) التي تحتاجها، وذلك باسترجاعها إما من عند (A_2) أو من عند (A_3). إذا ما أخذنا إمكانية الاسترجاع من عند (A_2)، فإن (A_1) عندما تتسلم الكمية (25) من عند (A_2) يجب عليها أن تتخلى على نفس الكمية لـ (A_2) التي كانت تتسلمها عن طريق (B_1) أو (B_3). ولكن نلاحظ أن (A_1) لا تستطيع تعويض (A_2) بمقدار (25) وحدة عن طريق B_1 أو B_3 وذلك لأن طرق النقل $(B_1 A_2)$، $(B_3 A_2)$ غير مستعملة. بقي (A_3)، يستطيع (B_2) أن يسحب كمية مقدارها (20 وحدة) من عند (A_3) لتزويد (A_1). ولكن (A_1) لا يستطيع تعويض (A_3) إلا بـ 5 وحدات عن طريق (B_3). أما عن طريق (B_1) فلا يستطيع، لأن هذا الطريق غير مستعمل أصلا.

في المحصلة (B_2) لا يستطيع تزويد (A_1) إلا بـ 5 وحدات من عند (A_3)، ويتحمل بذلك تكلفة نقل جديدة إلى عند (A_1) مقدارها هو (2 و.ن./للوحدة)، في المقابل (A_1) تعوض لـ (A_3) 5 وحدات عن طريق (B_3)، و(B_3) يتحمل تكاليف نقل جديدة إلى عند (A_3) مقدارها (5 و.ن./للوحدة) ويتخلص من تكلفة نقل كان يدفعها سابقا إلى عند (A_1) مقدارها (4 و.ن./للوحدة).

ويكون التغير في تكلفة نقل الوحدة نتيجة إدخال هذا الطريق هو (+ 2- 2 + 5- 4 = + 1) وتكون محاولة تجريب إدخال طريق النقل المشار إليه مرفوضة لأنه يساهم في زيادة تكاليف نقل الوحدة بمقدار (1 و.ن) والتكلفة الكلية بمقدار 5× 1 = 5 و.ن عما كان عليه سابقا. ننتقل الآن إلى تجريب طريق النقل غير المستخدم **الموالي حسب الترتيب** وهو طريق النقل الذي يجمع بين (A_2) و(B_3).

ج- نجرب طريق النقل B_3A_2.

(A_2) تحتاج إلى 30 وحدة، (B_3)كانت عندها 20 وحدة، فلكي تزود (A_2)بهذه الكمية يجب أن تأخذها إما من عند (A_3) أو (A_1).

فإذا ما أخذت 15 وحدة من عند (A_3) وسلمتها لـ (A_2)، فإن (A_2) تعوض لها نفس الكمية عن طريق (B_2). ثم تحاول أن تعطيها أيضا (5 وحدات) من عند (A_1).

ولكن (A_2) لا تستطيع أن ترجع لـ (A_1) 5 وحدات التي يمكن أن تتسلمهم منها لا عن طريق B_2 ولا B_1 لأن طرق النقل المعنية غير مستعملة حاليا. إذا فلا تستطيع (B_3) أن تعطي لـ (A_2) إلا 15 وحدة من عند (A_3). وتتحمل بذلك تكلفة نقل جديدة مقدارها (3 و.ن/للوحدة) وتتجنب تكلفة نقل سابقة قيمتها

(5 و.ن/للوحدة). أما (B_2) فتعوض 15 وحدة لـ (A_3) من عند (A_2) وتتحمل بذلك تكلفة نقل جديـدة (2 و.ن/للوحدة) وتتجنب تكلفة نقل (4 و.ن/للوحدة) كانت تدفعها سابقا إلى عند (A_2).

ويكون مجموع التغير في التكلفة الأحادية للنقل الناتج عن إدخال طريق النقل الجديد هي: (-5 + 3 + 2-4 = -4) وهذا يعني انخفاض في التكلفة الأحادية للنقل مقداره 5 وحدات نقدية، ويصبح مقدار الانخفاض في التكلفة الكلية للنقل الناتج عن تحويل 15 وحدة من (A_3 إلى A_2) هو (4×15=60 و.ن).

وتصبح قيمة التكلفة الكلية للنقل إذا ما أدخلنا هذا الطريق للنقل تساوي 255 = 60 - 315 و.ن.، وهذا معناه أن إدخال طريق النقل ($A_2 B_3$) إلى شبكة النقل المحصل عليها سابقا يساهم في تخفيض تكلفة النقل بمقدار 60 و.ن.، فندخله إذن في شبكة النقل السابقة وتصبح الشبكة الجديدة هي:

	B_1	B_2	B_3	
25	3 / 20	2 / 0	4 / 5	A_1
30	1 / 0	4 / 15	3 / 15	A_2
35	4 / 0	2 / 35	5 / 0	A_3
	20	50	20	

نجري الاختبار من جديد لتحسين الحل المحصل عليه وذلك بإعادة التجريب من جديد من البداية (من اليمين إلى اليسار)، ونحاول في هذه الحالة إدخال طريق النقل غير المستخدم (B_2 A_1).

د- نجرب طريق النقلA_1 B_2:

(A_1) يحتاج إلى 25 وحدة وB_2 عنده (50 وحدة)، فيزود إذن (A_1) بـ 25 وحدة التي تحتاجها وذلك باسترجاعها من عند (A_2) أو (A_3) إما عن طريق (B_3) أو (B_1).

نلاحظ أن (A_1) لا تستطيع أن تعطي أي شيء لـ A_3 لا عن طريق (B_3) ولا عن طريق (B_2) لأنها طرق نقل غير مستخدمة حاليا. أما (A_1) فتستطيع أن ترجع (5 وحدات) فقط إلى (A_2) عن طريق (B_3) وتتحمل بذلك 4 و.ن/للوحدة كتكلفة نقل جديدة، وتتجنب 3 و.ن كتكلفة سابقة.

إذن فـ (B_2) لا تستطيع أن تزود (A_1) إلا بـ 5 وحدات من عند (A_2) وتتحمل بذلك تكلفة مقدارها 2 ون/للوحدة وتتجنب دفع تكلفة قيمتها 4 و.ن/للوحدة).

ويكون مجموع الانخفاض في التكلفة الإضافية الأحادية الناتجة عن إدخال الطريق (B_2 A_1) يساوي 3 و.ن/للوحدة (- 4 + 3 -4 + 2 = - 3) وانخفاض في التكلفة الكلية الناتج عن تحويل 5 وحدات من A_1 إلى A_2 مقداره: 5 × (- 3) = -15 و.ن. والتكلفـــة الإجمالية تصبح كالتالـي:255 – 15 = 240 و.ن.

إدخال طريق النقل ($B_2 A_1$) إلى شبكة النقل المحصل عليها في المرحلة السابقة يساهم في تخفيض تكلفة النقل بمقدار 15 و.ن، فندخله إذن في شبكة النقل السابقة وتصبح الشبكة الجديدة هي:

	B_1	B_2	B_3	
25	3 / 20	2 / 5	4 / 0	A_1
30	1 / 0	4 / 10	3 / 20	A_2
35	4 / 0	2 / 35	5 / 0	A_3
	20	50	20	

نجرب من جديد، وندخل طريق النقل غير المستخدم $B_3 A_1$.

هـ – ندخل طريق النقل ($B_3 A_1$):

(A_1) تحتاج إلى 25 وحدة، و(B_3) عندها 20 وحدة فتزودها بها وذلك باسترجاعها من عند (A_2)، ولكن بما أن (A_1) لا تستطيع أن ترجع إلى (A_2) إلا 5 وحدات عن طريق (B_2) ولا تستطيع أن ترجع إلى (A_2) أي شيء عن طريق (B_1). إذن فـ B_3 لا تستطيع أن تزود A_1 إلا بـ 5 وحدات، وتتحمل بذلك تكلفة نقل جديدة مقدارها 4 و.ن/للوحدة وتتجنب تكلفة سابقة قيمتها 3 و.ن/للوحدة.

أما (B_2) فتتحمل تكلفة جديدة قدرها 4 و.ن/للوحدة وتتجنب تكلفة سابقة قيمتها 2 و.ن/للوحدة، ويكون مجموع التغير في تكلفة نقل الوحدة الواحدة هو ثلاث وحدات نقدية (+3).

وهذا يعني أنه لو ندخل طريق النقل المشار إليه فسيترتب عليه زيادة في تكاليف النقل بمقدار 3 و.ن. لكل وحدة منقولة وبالتالي يجب رفض إدخال هذا الطريق.

و– نجرب طريق النقل B_1 A_2:

(B_1) تعطي لـ (A_2) 10 وحدات فقط من عند (A_1) لأن (A_2) لا تستطيع أن ترجع إلا 10 وحدات لـ (A_1) عن طريق (B_2) ولا شيء عن طريق (B_3). فـ (B_2) لو قامت بهذا الإجراء فتتحمل 2 و.ن كتكلفة نقل جديدة وتتجنب تكلفة مقدارها 4 و.ن/للوحدة أما (B_1) فتتحمل تكلفة مقدارها1 و.ن/للوحدة وتتجنب تكلفة 3 و.ن/للوحدة.

سوف يترتب إذن عن إدخال طريق النقل المشار إليه انخفاض في تكلفة النقل الأحادية بمقدار 4 و.ن. (-3 + 1- 4 + 2 = -4 و.ن/للوحدة)، وتكون تكلفة تبادل 10 وحدات مابين A_1 و A_2 هي4.10 = 40 و.ن وتصبح تكلفة شبكة النقل الجديدة هي 240 - 40 = 200 و.ن.

شبكة النقل الناتجة عن إدخال طريق النقل المشار إليه هي:

	b_1	b_2	b_3	
25	3 / 10	2 / 15	4 / 0	a_1
30	1 / 10	4 / 0	3 / 20	a_2
35	4 / 0	2 / 35	5 / 0	a_3
	20	50	20	

ل- نجرب الطريق (B_3 A_1):

نلاحظ أن (A_1) لا تستطيع أن ترجع إلا 10 وحدات لـ (A_2) عن طريق (B_1) ولا شيء عن طريق (B_2)، إذن (B_1) يتخلى عن تكلفة أحادية قدرها (3 و.ن/للوحدة) ويتحمل تكلفة أحادية أخرى تقدر بـ (1 و.ن/للوحدة). ومن جهة أخرى (B_3) لا تزود (A_1) إلا بـ 10 وحدات من عند (A_2) وتتحمل بذلك تكلفة أحادية قدرها (4 و.ن / للوحدة) وتتخلى عن تكلفة كانت تدفعها سابقا بمقدار (3 و.ن/للوحدة).

يترتب إذن على إدخال طريق النقل b_3 a_1 انخفاض في التكاليف الأحادية للنقل بمقدار وحدة نقدية واحدة (-3 + 1-3 + 4 = -1) وتكون تكلفة تبادل 10 وحدات بين a_1،a_2 هي 10×1 = 10 و.ن/للوحدة بالانخفاض، أي أن التكلفة الكلية للنقل تصبح 200 - 10 = 190 و.ن.

شبكة النقل الجديدة تصبح كالتالي:

	B_1	B_2	B_3	
25	3 / 0	2 / 15	4 / 10	A_1
30	1 / 20	4 / 0	3 / 10	A_2
35	4 / 0	2 / 35	5 / 0	A_3
	20	50	20	

ك- نجرب طريق النقل B_1A_1:

(B_1) لا تستطيع أن تعطي لـ (A_1) إلا 10 وحدات من عند (A_2) ولا تستطيع أن تعطي أي شيء عن طريق (A_3) لأن (A_1) لا تستطيع أن ترد إلى (A_2) إلا 10 وحدات عن طريق (B_3) وتتحمل بالتالي (B_3) قيمة 3 و.ن/للوحدة كتكلفة نقل جديدة وتتخلى عن تكلفة قيمتها 4 و.ن/للوحدة. أما (B_1) فتدفع 3 و.ن/للوحدة وتتخلى عن 1 و.ن /للوحدة كتكلفة كانت تدفعها سابقا. وتكون نتيجة هذا التبادل هي ارتفاع في التكلفة الأحادية للنقل بمقدار وحدة نقدية واحدة، وبالتالي نرفض إدخال هذا الطريق.

م– نجرب طريق النقل B_2 A_2:

(B_2) ممكن أن تعطي لـ (A_2) عن طريق (A_3) ولكن (A_2) لا تستطيع أن تعوض نفس الكمية إلى (A_3)، لأن طريق النقل هذا غير مستعمل. لكن (B_2) ممكن أن تعطي لـ (A_2) 10 وحدات من عند (A_1) وتتحمل بالتالي تكلفة نقل بقدر 4 و.ن/للوحدة وتتخلى عن تكلفـــة 2 و.ن/للوحدة، و(A_2) تستطيع أن ترد (10 وحدات) لـ (A_1) عن طريق (B_3) وتتحمل بالتالي تكلفة (4 و.ن للوحدة) وتتخلى عن 3 و.ن للوحدة ولكن لا تستطيع أن تعطيها أي شيء عن طريق (B_1). والنتيجة هي زيادة التكاليف الأحادية بـ 3و.ن (+ 4 - 2 - 3 + 4 = + 3) فنرفض هذا الاقتراح.

ع– نجرب الطريق B_3 A_3:

(B_3) تعطي لـ (A_3) 10 وحدات من عند (A_1) ويتحمل مقابل ذلك (5 و.ن) ويتخلى عن دفع تكلفة بـ (4 و.ن). (B_3) لا يستطيع أن يعطي أي شيء لـ (A_3) من عند (A_2) لأن (A_3) لا يستطيع أن يعوض (A_2) بأي شيء. مجموع التكلفة الإضافية هنا = +1 (طريق مرفوض).

س– نجرب B_1 A_3:

(B_1) تعطي لـ (A_3) 20 وحدة من عند (A_2) ولكن (A_3) لا تستطيع أن تعوض ل(A_2) لا عن طريق (B_3) ولا (B_2) (غير ممكن). فهذه الطريق تقنيا غير ممكن استعمالها.

نكون بهذا قد انهينا **تجريب كل الطرق غير المستخدمة** وكلها لم تؤدي إلى تحسين هذا الحل الأخير المحصل عليه، أي لم تؤدي إلى تخفيض تكلفة النقل. فتكون التكلفة 190 و.ن. هي التكلفة الدنيا الممكن الوصول إليها وشبكة النقل

الأخيرة (دات التكلفة **190**) المحصل عليها هي الشبكة المثلى. وبذلك يصبح هذا هو الحل الأمثل للمسألة المعطاة.

أمثلة:

مثال 1:

ما هي تكلفة النقل الدنيا الممكن الوصول إليها وفق المعطيات التالية:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	2	5	4	800
A_2	3	5	6	500
A_3	11	7	8	600
A_4	9	4	3	1300
	1600	900	700	3200 / 3200

الأرقام داخل المربع الداخلي هي تكاليف النقل الأحادية (C_{ij})، الأرقام خارجه فهي الكميات المعروضة من طرف المصادر والمطلوبة من طرف المستعملين، على أساس أن (B_3, B_2, B_1) هي المصادر الموجود فيها المنتج المراد نقله و(A_4,A_3,A_2,A_1) هم المستعملون الذين يريدون الحصول على المنتج المذكور، وأن مجموع الطلب والعرض متساويان.

الحل:

حل هذه المسألة يمر عبر مرحلتين:

- المرحلة الأولى هي إيجاد حل ابتدائي مقبول؛

– المرحلة الثانية هي البحث عن الحل الأمثل، أي إيجاد شبكة النقل الأرخص والتي تتطلب دفع أقل ما يمكن من تكاليف النقل.

البحث عن الحل الابتدائي:

سوف نبحث عن الحل الابتدائي باستعمال طريقة الزاوية الشمالية الغربية (MCNO)، والجدول التالي يعطي نتيجة هذا الحل.

	B_1	B_2	B_3			
A_1	2 800	5 0	4 0	800	0	
A_2	3 500	5 0	6 0	500	0	
A_3	11 300	7 300	8 0	600	300	0
A_4	9 0	4 600	3 700	1300	700	0
	1600	900	700	3200 3200		
	800	600	0			
	300	0				
	0					

عدد طرق النقل المستخدمة في الحل الابتدائي يساوي ستة (6) وهو يساوي العدد المطلوب حسب المقياس $(n + m - 1)$ الذي يساوي $(4 + 3 - 1 = 6)$، فالحل الابتدائي إذن مقبول. التكلفة الكلية لشبكة النقل المحصل عليها في الحل الابتدائي

تساوي: (800×2 + 500×3 + 300×11 + 300×7 + 600×4 + 700×3) = 13000 و.ن.

البحث عن الحل الأمثل:

نستخدم طريقة التجريب في البحث عن الحل الأمثل وذلك بإدخال طرق النقل غير المستخدمة في الحل الابتدائي.

نجرب إدخال طريق النقل (A_1B_3):

إدخال هذا الطريق غير ممكن لأن إمكانيات التعويض غير ممكنة في حال إدخاله.

طريق النقل (A_1B_2):

يترتب على إدخال هذا الطريق تغير في تكاليف النقل الأحادية بمقدار 7 وحدات بالزيادة (‎-7 + 5 -3 +11 = +7)، فنرفض إذن إدخال هذا الطريق.

طريق النقل (A_2B_3):

إدخال هذا الطريق غير ممكن أيضا لأن إمكانيات التعويض غير ممكنة في حال إدخاله.

طريق النقل (A_2B_2):

يترتب على إدخال هذا الطريق زيادة في تكاليف النقل الأحادية بمقدار 6 وحدات (‎-7 + 5 -3 +11 = + 6). فيرفض أيضا هذا الطريق.

طريق النقل (A_3B_3):

إن إدخال هذا الطريق سيترتب عليه زيادة في تكلفة النقل الأحادية بمقدار 2 و.ن. (‎-3 +8 -7 +4 =2)، فلا فائدة من هذا الطريق.

طريق النقل (A_1B_4):

يترتب على إدخال هذا الطريق زيادة في تكاليف النقل الأحادية بمقدار 1 و.ن (-11 + 9 -4 +7 = + 1). فنرفض إدخال هذا الطريق أيضا. لقد جربنا كل طرق النقل غير المستخدمة ولم تؤدي إلى تخفيض تكلفة النقل، إذن فالحل الابتدائي غير قابل للتحسين ويكون الحل الأمثل هو نفسه الحل الابتدائي بتكلفة نقل كلية تساوي 13000 و.ن.

مثال 2:

أوجد أرخص شبكة نقل كلية ممكنة لحالة النقل الممثلة بالمعطيات التالية:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9	3	7	2
A_2	5	7	8	2
A_3	10	2	5	6
	3	3	4	10 / 10

البحث عن الحل الابتدائي:

سوف نستخدم طريقة الزاوية الشمالية الغربية (MCNO) في البحث عن الحل الابتدائي، والجدول التالي يعطي نتيجة هذا الحل.

	B_1	B_2	B_3			
A_1	**2**	0	**0**	**2**	0	
A2	1	1	0	2	1	0
A_3	**0**	**2**	**4**	**6**	**4**	0
	3	**3**	**4**	**10** **10**		
	1	**2**	**0**			
	0	**0**				

يتكون الحل الابتدائي من عدد من طرق النقل يساوي خمسة (5) وهو يساوي العدد المطلوب حسب المقياس $n + m - 1$ (3 + 3 – 1 = 5)، إذن فالحل الابتدائي مقبول. وتكلفة شبكة النقل المستخدمة في هذا الحل تساوي 54 و.ن.

البحث عن الحل الأمثل:

نبحث عن الحل الأمثل باستخدام طريقة التجريب.

نجرب طريق النقل غير المستخدم (A_1B_3):

إدخال هذا الطريق غير ممكن لأن إمكانيات التعويض غير متاحة في حال إدخاله.

طريق النقل (A_1B_2):

سوف يترتب على إدخال هذا الطريق انخفاض في تكاليف النقل الأحادية بمقدار 8 وحدات نقدية (-7 + 3 -9 +5 = - 8).

فنقبل إدخال هذا الطريق لأن إدخاله يساهم في تخفيض التكلفة الأحادية للنقل بمقدار 8 و.ن. وتصبح تكلفة النقل الجديدة هي: 54 – 8 = 46 و.ن.

شبكة النقل الجديدة بعد إدخال الطريق المشار إليه هي:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 / 1	3 / 1	7 / 0	2
A_2	5 / 2	7 / 0	8 / 0	2
A_3	10 / 0	2 / 2	5 / 4	6
	3	3	4	

طريق النقل (A_2B_3):

إدخال هذا الطريق غير ممكن لأن إمكانيات التعويض غير متاحة في حال إدخاله.

طريق النقل (A_2B_2):

يؤدي إدخال هذا الطريق إلى زيادة في تكاليف النقل الأحادية بمقدار 8 و.ن (**–3 + 7 –5 +9 = +8**).فنرفض إدخال هذا الطريق أيضا.

يساهم إدخال هذا الطريق في زيادة تكاليف النقل الأحادية بمقدار 2 و.ن (**–9 + 10–2 +3 = + 2**). فنرفض إدخال هذا الطريق أيضا.

لقد جربنا كل طرق النقل غير المستخدمة ولم تساهم في تخفيض تكلفة النقل أكثر من المستوى الذي توصلنا إليه وهو 46 و.ن. لذلك نعتبر أن أدنى مستوى لتكاليف النقل يمكن أن نصل إليه هو 46 و.ن. وهذا هو الحل الأمثل. والشبكة المثلى للنقل هي الشبكة الأخيرة المتحصل عليها بعد إدخال طريق النقل (A_1B_2).

مثال 3:

أوجد تكلفة النقل الدنيا الممكن الوصول إليها وفق المعطيات التالية:

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	7	3	4	6
A_2	2	5	4	3	9
A_3	7	9	6	5	15
	7	5	8	10	30 / 30

البحث عن الحل الابتدائي:

نستخدم هنا أيضا طريقة الزاوية الشمالية الغربية (MCNO) في البحث عن الحل الابتدائي، والجدول التالي يعطي نتيجة هذا الحل.

	B_1	B_2	B_3	B_3				
A_1	6	0	0	0	6	0		
A_2	1	5	3	0	9	8	3	0
A_3	0	0	5	10	15	10	0	
	7	5	8	10	30 30			
	1	0	5					
	0		0					

يتكون الحل الابتدائي من عدد من طرق النقل يســـاوي ســـتة (6) وهو يساوي العدد المطلوب حسب المقياس $n + m - 1$ $(4 + 3 - 1 = 6)$، إذن فالحل الابتدائي مقبول. وتكلفة شبكة النقل المستخدمة في هذا الحل تساوي 131 و.ن.

البحث عن الحل الأمثل:

نبحث عن الحل الأمثل باستخدام طريقة التجريب.

نجرب طريق النقل غير المستخدم (A_1B_4):

إمكانيات التبادل لهذا الطريق للنقل والطرق الأخرى غير متوفرة وبالتالي فهذا الطريق غير ممكن إدخاله في شبكة النقل المتحصل عليها في الحل الابتدائي.

طريق النقل (A_1B_3):

يترتب على إدخال هذا الطريق للنقل انخفاض في تكاليف النقل الأحادية بمقدار وحدة واحدة أي $(+3 - 4 + 2 - 2 = -1)$ وذلك بتبادل a_1 و a_2 لكمية منقولة

مقدارها 3 وحدات. ويكون الانخفاض الكلي في تكلفة النقل الناتج عن إدخال هذا الطريق هو 3 و.ن وتصبح التكلفة الكلية للنقل للشبكة الجديدة للنقل هي: 131 – 3 = 128 و.ن، والشبكة الجديدة للنقل هي:

	B_1	B_2	B_3	B_4	
6	2 / 3	7 / 0	3 / 3	4 / 0	A_1
9	2 / 4	5 / 5	4 / 0	3 / 0	A_2
15	7 / 0	9 / 0	6 / 5	5 / 10	A_3
	7	5	8	10	

طريق النقل (A_1B_4):

يتسبب هذا الطريق في حالة إدخاله في زيادة تكاليف النقل الأحادية بمقدار 1 و.ن (-5 +4 -3 +6 = +1). فنرفض إدخال هذا الطريق.

طريق النقل (A_1B_2):

يتسبب هذا الطريق في حالة إدخاله في زيادة تكاليف النقل الأحادية بمقدار **2** و.ن (**-5 +7 -2 +2 = +2**). فنرفض إدخال هذا الطريق.

طريق النقل (A_2B_4):

لا يمكن إدخال هذا الطريق لأن إمكانيات التعويض غير متاحة.

طريق النقل (A_2B_3):

يترتب على إدخال هذا الطريق زيادة تكاليف النقل الأحادية بمقدار 1 و.ن (**3**- + **4** - **2** + **2**= +1). فنرفض إدخال هذا الطريق.

طريق النقل (A_3B_2):

لا يمكن إدخال هذا الطريق لأن إمكانيات التعويض غير متاحة.

طريق النقل (A_3B_1):

يتسبب هذا الطريق في حالة إدخاله في زيادة تكاليف النقل الأحادية بمقدار 2 وحدة نقدية (**2**- + **7** - **6** + **3** = +2). فنرفض إدخال هذا الطريق.

تم تجريب كل طرق النقل غير المستخدمة ولم تؤدي إلى تحسين الحل المحصل عليه سابقا، وبالتالي فالحل المحصل عليه بعد إدخال طريق النقل A_1B_3 يعتبر حلا أمثلا، بمعنى يمثل المستوى الأدنى للتكاليف الممكن الوصول إليه وهو (128 و.ن.).

3-البحث عن الحل الأمثل باستخدام طريقة التحويل:

هذه الطريقة تتكون من المراحل التالية:

أ- نكون أربع جداول ذات الأبعاد (m×n) بحيث n هو عدد الأعمدة التي نخصصها للمصادر وm عدد الصفوف التي نخصصها للمستعملين.

ب- نبدأ بالجدول الأول ونشطب (نضع علامة –) الخانات الفارغة: أي طرق النقل غير المستخدمة حسب الحل الابتدائي.

ت- ثم نأخذ الجداول الثلاثة المتبقية ونشطب (نضع علامة –) الخانات المملوءة، أي طرق النقل المستعملة حسب الحل الابتدائي.

ث- نضع في الجدول الأول والثالث التكاليف الأحادية للنقل (C_{ij}) في الخانات غير المشطوبة أي الخالية من علامة (–).

ج- نضيف إلى الجدول الأول سطرا وعمودا إضافيين (E_i) و (F_j) على التوالي، بحيث قيم (F_j)، (E_i) تحسب حسب العبارة التالية $C_{ij} = E_i + F_j$، مع إعطائنا في بداية العملية القيمة "صفر" لأي من (F_j) أو (E_i).

ح- نحول قيم (E_i) و(F_j) إلى الجدول الثاني ونحسب قيم التكاليف(C'_{ij}) للخانات الفارغة، أي الخالية من علامة (–) وذلك باستعمال العبارة: $C'_{ij} = E_i + F_j$.

خ- نحسب الفرق (Δ_{ij}) بين التكاليف الحقيقية (C_{ij}) الموجودة في الخانات الفارغة في الجدول الثالث والتكاليف (C'_{ij}) لنفس الخانات في الجدول الثاني.

أي : $\Delta_{ij} = C_{ij}(III) - C'ij(II)$ ، ثم ننقل قيم (Δ_{ij}) إلى الجدول الرابع ونضعها في الخانات الفارغة (غير المشطوبة).

د- إذا كانت كل قيم (Δ_{ij}) غير سالبة ($\mathbf{\Delta_{ij} \geq 0}$) فإن الحل الابتدائي المحصل عليه يعتبر حلا أمثلا ولا توجد إمكانية لتحسينه. أما إذا كانت هناك بعض القيم لـ (Δ_{ij}) سالبة، فإن هذا يعني أن الحل الابتدائي ليس هو الحل الأمثل وأن هناك حلا أمثلا يجب البحث عليه. عملية البحث عن هذا الحل تتطلب أن الخانة (طريق النقل) التي تحتوي على أصغر قيمة سالبة لـ (Δ_{ij}) يجب أن تتلقى كمية من المنتج المراد نقله، التي **تحول** إليها من الخانات المجاورة لها وفق **دورة أو حلقة تحويل** (une boucle de transfert)، وذلك حسب القواعد التالية:

– التحويل يجب أن يتم حسب دورة (حلقة) مشكلة من **خط منكسر مغلق، رؤوسه هي زوايا قائمة.** كل خانة من خانات جدول النقل التي تشكل جزء من هذه الدورة وتساهم في عملية التحويل يجب أن تشكل زاوية لهذه الحلقة.

– التنقل داخل هذه الحلقة يجب أن يكون عموديا أو أفقيا فقط.

– نضع إشارات (–)، (+) على رؤوس هذه الحلقة، هذه الإشارات يجب أن تكون متناوبة عند رؤوس زوايا الحلقة. نبدأ وضع هذه الإشارات من طريق النقل الذي نريد أن نحول إليه (الذي نريد أن ندخله في شبكة النقل)، فنضع أمام هذا الطريق الإشارة (+) وهذا دلالة على أننا نريد أن نضيف إلى هذا الطريق كمية ما نحولها إليه من الخانات الأخرى التي تشكل حلقة التحويل.

– الخانات التي توجد أمامها إشارة (–) تعني أن هذه الخانات سوف نطرح منها، أما تلك التي توجد أمامها (+) فتعني أننا نضيف إليها.

– تبدأ عملية التحويل عبر هذه الحلقة من الخانة التي تحتوي على أقل كمية من بين الخانات التي توجد أمامها إشارة (–).

– إذا كانت الكمية الموجودة في الخانة، ذات الإشارة السالبة، التي تحتوي على أقل كمية هي على سبيل المثال (×)، فنقوم بطرح (×) من كل الخانات ذات الإشارات (–) وإضافتها إلى كل خانات الحلقة ذات الإشارة (+). بمعنى نبدأ عملية التحويل من الخانة ذات الكمية الأقل من بين الخانات ذات الإشارة السالبة، فنطرح منها الكمية الموجودة فيها ثم نضيفها إلى الخانة المجاورة لها على مسار التحويل، نطرح بعدها نفس هذه الكمية من الخانة الثالثة على مسار التحويل عبر الحلقة لنضيفها بعدها إلى الخانة الرابعة وهكذا حتى تنتهي الحلقة.

– إذا كانت الخانات ذات الإشارة السالبة تحتوي على عدة كميات صغيرة متساوية، فإن نقل إحدى هذه الكميات إلى طريق النقل الذي نريد ملأه سوف يترتب عليه انخفاض في عدد طرق النقل أقل من العدد المطلوب وفق المقياس (n+m-1)، وبالتالي يصبح الحل المحصل عليه غير مقبول.

– لذلك يجب إعادة رفع عدد طرق النقل المستخدمة إلى عدد مساوي لـ n+m-1 ، وذلك بملء عدد (n-1) من الخانات التي أصبحت فارغة بفعل المشكل المشار إليه، بكمية تساوي الصفر، والخانات التي يجب إعادة ملئها هي تلك التي تكون تكاليف نقلها هي الأصغر.

– كل رأس من رؤوس هذه الحلقة يجب أن يكون ناتجا عن التقاء خطين فقط من خطوط الحلقة: واحد أفقي والآخر عمودي، لهذا لا يجب أن يكون هناك ثلاث رؤوس متتالية على نفس الخط (الضلع) المشكل لهذه الحلقة، سواء كان عموديا أو أفقيا. بمعنى آخر كل خط في هذه الحلقة يجب أن يجمع رأسين فقط يكونا موجودين في نهايتيه.

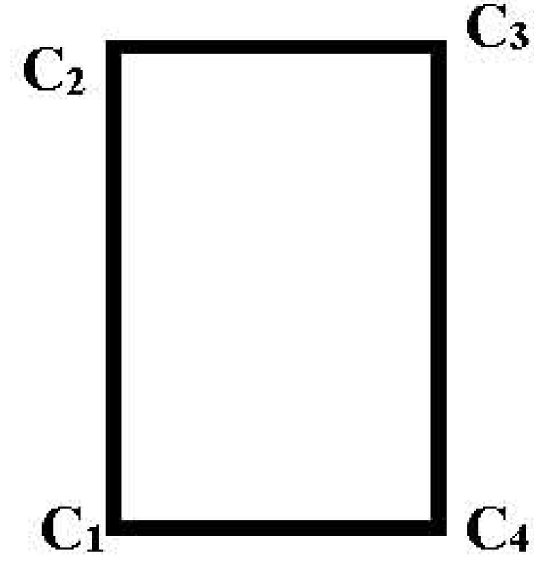
– الخطوط المشكلة لهذه الحلقة يمكن أن تقطع بعضها البعض ولكن نقاط التقاطع لا يمكن اعتبارها رؤوسا لهذه الحلقة.

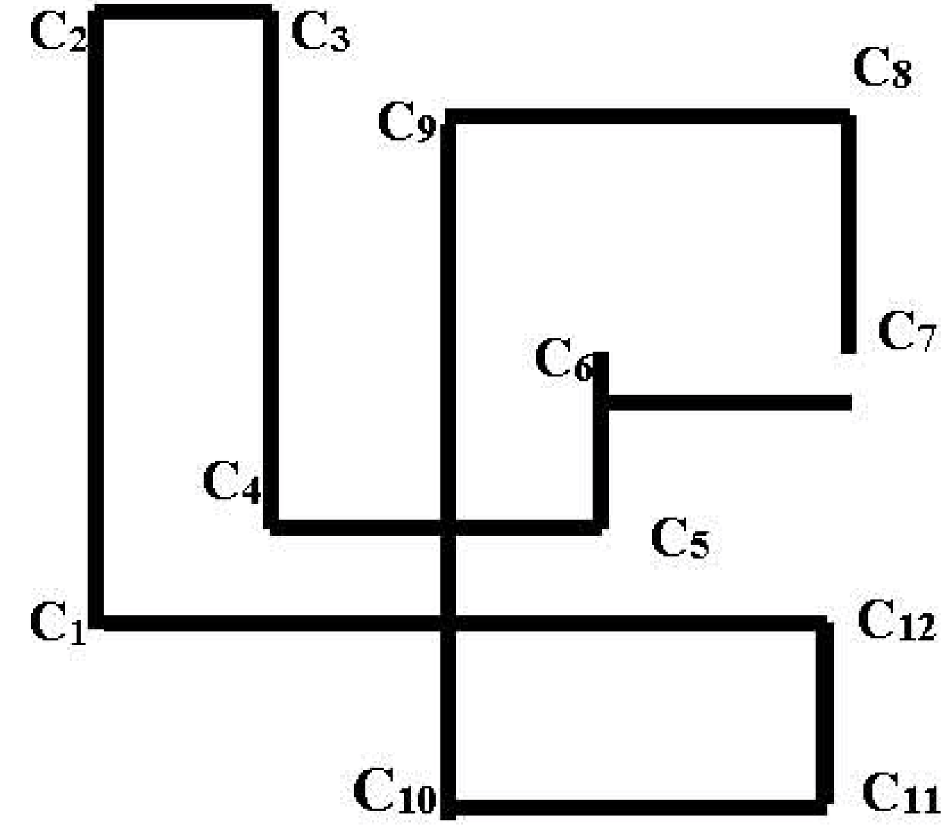
– الخانة الفارغة لا يمكن أن اعتبارها رأسا من رؤوس هذه الدورة ماعدا تلك التي نريد أن نملأها (أي نحول إليها).

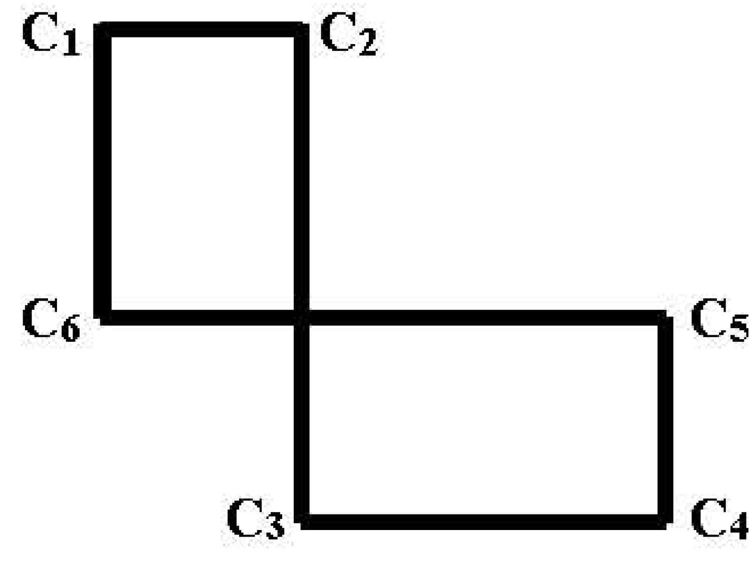
– في كل حلقة تحويل عدد الرؤوس يجب أن يكون دائما زوجيا.

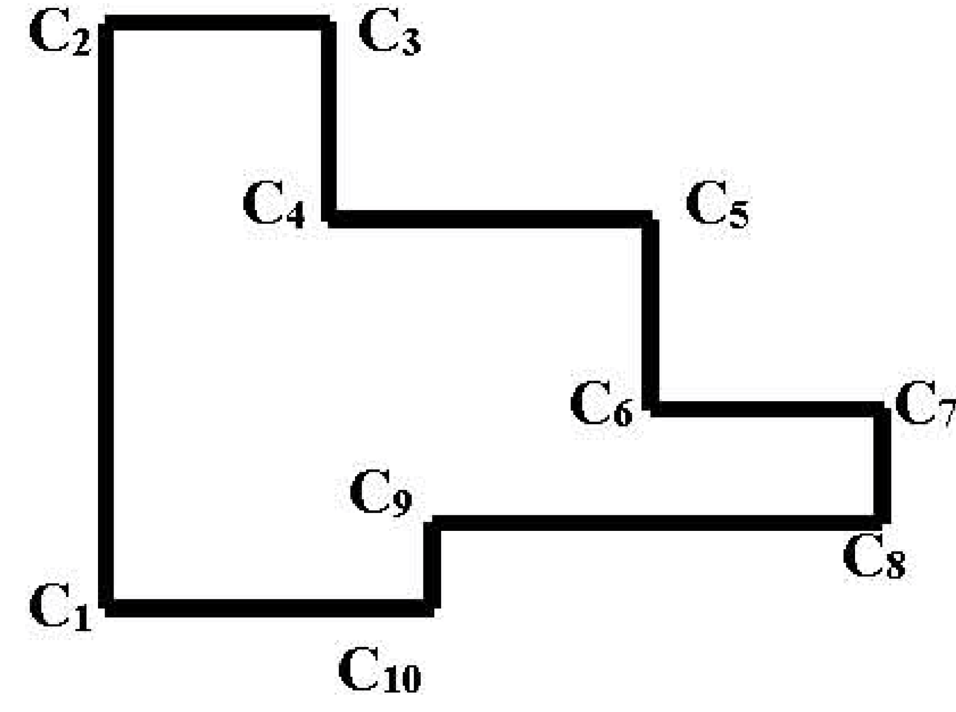
– في كل محاولة لتحسين الحل هناك دائما دورة تحويل واحدة صحيحة فقط.

فيما يلي نعطي بعض أشكال حلقات التحويل كما يمكن أن نجدها في بعض جداول حل مسألة النقل.









مثال 1:

نأخذ الآن الحل الابتدائي المتحصل عليه في المثال السابق ونبدأ في البحث عن حل أمثل حسب طريقة التحويل.

المحاولة الأولى:

ليكن الجدول الممثل لطرق النقل حسب الحل الابتدائي، وجدول تكاليف النقل الأحادية (C_{ij}).

3	**2**	**4**
1	**4**	**3**
4	**2**	**5**

20	**5**	
	30	
	15	**20**

الخطوة الأولى: نكون الجداول الأربعة ونشطب في الجدول الأول طرق النقل غير المستخدمة حسب الحل الابتدائي أي نضع فيها علامة (–)، ثم نأخذ الجداول الثلاثة المتبقية ونشطب فيها بالعكس طرق النقل المستخدمة حسب نفس الحل.

جدول -I-

		—
—		—
—		

جدول -II-

—	—	
	—	
	—	—

جدول -III-

—	—	
	—	
	—	—

جدول -IV-

—	—	
	—	
	—	—

الخطوة الثانية: نضع في الجدول الأول والثالث تكاليف النقل الأحادية (C_{ij}) في الخانات الفارغة (أي التي لا تحتوي على علامة الشطب –).

3	2	—
—	4	—
—	2	5

جدول -I-
قيم C_{ij} للحل الابتدائي

—	—	4
1	—	3
4	—	—

جدول -III-
قيم C_{ij} الأخرى

الخطوة 3: حساب قيم العمود الإضافي (E_i) والصف الإضافي (F_j) ووضعها في الجدول الأول. حساب هذه القيم نجريها حسب العلاقة التالية: $C_{ij} = E_i + F_j$. نضع على سبيل المثال (عشوائيا) $F_1=0$، ثم نجري الحساب. (يمكن إعطاء أي من قيم E_i أو F_j القيمة **صفر** حتى نتمكن من حساب قيم E_i و F_j الأخرى).

جدول -I-
قيم E_i و F_j

				E_i
				E_i
	3	**2**	-	**3**
	-	**4**	-	**5**
	-	**2**	**5**	**3**
F_j	**0**	**-1**	**2**	

$C_{11} = E_1 + f_1$ $3 = E_1 + 0$ $E_1 = 3$	**$C_{22} = E_2 + F_2$ $4 = E_2 - 1$ $E_2 = 5$**
$C_{12} = E_1 + F_2$ $2 = 3 + F_2$ $F_2 = -1$	**$C_{32} = E_3 + F_2$ $2 = E_3 - 1$ $E_3 = 3$**
	$C_{33} = E_3 + F_3$ $5 = 3 + F_3$ $F_3 = 2$

الخطوة 4: نحسب الآن قيم (C'_{ij}) حسب العبارة $C'_{ij} = E_i + F_j$ ثم ننقل هذه القيم إلى الجدول الثاني.

$C'_{13} = E_1+F_3$ $= 3 + 2$ $= 5$	$C'_{31}= E_3+F_1$ $=3 + 0$ $= 3$
$C'_{21}=E_2+F_1$ $= 5 + 0$ $= 5$	$C'_{23}=E_2+F_3$ $= 5 +2$ $=7$

جدول -II-
قيم C'_{ij}

				E_i
	-	-	5	3
	5	–	7	5
	3	-	–	3
F_J	0	-1	2	

الخطوة 5: نحسب قيم الفروقات (Δ_{ij}) وننقلها إلى الجدول رقم – **IV** -

$\Delta_{23}= C_{23} - C'_{23}$ $= 3 - 7$ $= - 4$	$\Delta_{13} = C_{13} - C'_{13}$ $= 4 - 5$ $=1$
$\Delta_{21}= C_{21}- C'_{21}$ $= 1- 5$ $= - 4$	$\Delta_{31}= C_{31}- C'_{31}$ $= 4 - 3$ $= 1$

جدول – IV -
قيم Δ_{ij}

-	-	- 1
- 4	-	- 4
1	-	-

لقد انتهينا الآن من تطبيق خطوات هذه الطريقة، ونلاحظ أن الجدول الرابع يحتوي على عدة قيم ل (Δ_{ij}) سالبة، وبالتالي فالحل الابتدائي المتوصل إليه سابقا ليس حلا أمثلا، وعلينا إذن الاستمرار في البحث عن الحل الأمثل. هناك قيمتان سالبتان صغيرتان ل (Δ_{ij}) في الجدول الرابع هما القيمتان (4-) لـ (Δ_{21}) و (Δ_{23}) فنختار عشوائيا (Δ_{23}). وهذا يعني أن التحويل يجب أن يتم إلى طريق النقل (A_2,B_3). نأخذ الجدول الممثل للكميات المنقولة حسب الحل الابتدائي ونجري التحويل إلى طريق النقل (A_2,B_3).

فانطلاقا من هذه الخانة وبمراعاة القواعد المشار إليها سابقا فإن حلقة التحويل تتكون من الخانات التالية: (3,3)، (3,2)، (2,2)، (2,3).

20	**5**	
	30 −	+
	15 +	− **20**

الآن نبحث عن أقل كمية من بين الكميات الموجودة في الخانات ذات الإشارة السالبة وهما الخانتين (3,3)، (2,2). فنجد أن طريق النقل (3,3) يحتوي على أقل كمية منقولة وهي (20). نضيف إذن (20) إلى الخانة (3,2) فتصبح الكمية الموجودة فيها الآن 35، ونطرحها من الكمية الموجودة في الخانة (2,2) فيتبقى فيها 10 وفي الأخير نضيفها إلى الخانة (2,3) التي كانت فارغة أصلا فتصبح الكمية الموجودة فيها الآن 20. وتصبح تكلفة شبكة النقل الجديدة (بعد المحاولة الأولى)

هي: التكلفة الكلية للشبكة السابقة مطروحا منها تكلفة الكمية المحولة الجديدة إلى طريق النقل (a_2, b_3). أي: 320 و.ن - 4 .20 = 240 و.ن.

شبكة النقل الجديدة بعد المحاولة الأولى هي:

20	**5**	
	10	**20**
	35	

هل وصلنا إلى الحل الأمثل أم لا؟ بمعنى هل هذا هو أدنى مستوى لتكلفة النقل الذي يمكن أن نصل إليه؟ لا نستطيع الإجابة على هذا السؤال الآن، ومن أجل معرفة ذلك يجب إجراء المحاولة الثانية والنظر إلى جدولها الرابع، فإذا كان لا يحتوي على القيم السالبة فهذا مؤشر على أن مستوى التكاليف الذي توصلنا إليه الآن بعد المحاولة الأولى يمثل حلا أمثلا وإذا كان العكس فيجب مواصلة محاولة البحث عن الحل الأمثل.

نجري إذن محاولة ثانية وذلك بإعادة إجراء نفس العمليات السابقة لهذه الطريقة على جدول النقل الجديد المحصل عليه بعد المحاولة الأولى.

المحاولة الثانية:

لدينا شبكة النقل المحصل عليها بعد المحاولة الأولى، نجري محاولة جديدة للبحث عن شبكة نقل جديدة تسمح لنا بتخفيض التكلفة الكلية للنقل إلى مستوى أدنى من المستوى الحالي.

نكون الجداول الأربعة الضرورية للحل حسب المراحل المشار إليها سابقا.

جدول -I-

				E_i
	3	2	-	3
	-	4	3	5
	-	2	-	3
F_J	0	- 1	- 2	

جدول -II-

				E_i
	-	-	1	3
	5	-	-	5
	3	-	1	3
F_J	0	- 1	- 2	

جدول -III-

-	-	4
1	-	-
4	-	5

جدول -IV-

-	-	3
- 4	-	-
1	-	4

بعد هذه المحاولة نلاحظ أن الجدول الرابع لا زال يحتوي على قيمة سالبة، وهي قيمة ($\Delta_{21} = -4$) وهذا يدل على أنه بالرغم من تحسين الحل وتخفيض تكلفة النقل من 320 و.ن. إلى 240 في المحاولة السابقة لكننا لا زلنا لم نصل إلى الحل الأمثل. فنستمر في البحث عن حل أمثل، وذلك بإدخال طريق النقل (a_2 ,b_1) إلى شبكة النقل السابقة وتحويل كمية ما إليه من طرق النقل المجاورة باستخدام دورة تحويل التي تمكننا من التحويل إلى الخانة ($i = 2$, $j = 1$).

نرجع إلى شبكة النقل المحصل عليها بعد المحاولة الأولى ونحاول أن نكون فيها حلقة تحويل تمكننا من ملء طريق النقل الجديد الذي نريد إدخاله إلى هذه الشبكة. انطلاقا من طريق النقل الجديد الذي نريد إدخاله (a_2 ,b_1) وبمراعاة القواعد المشار

إليها سابقا فإن حلقة التحويل تتكون من الخانات التالية: (2, 1) (1, 2) , (2, 2) (1, 1).

20 −	+ 5	
+	−10	20
	35	

نبحث الآن عن أقل كمية من بين الكميات الموجودة في الخانات ذات الإشارة السالبة وهما الخانتين (1, 1)، (2, 2). فنجد أن طريق النقل (2, 2) هو الذي يحتوي على أقل كمية منقولة وهي (10). نضيف إذن (10) إلى الخانة (2, 1) فتصبح الكمية الموجودة فيها الآن 15، ونطرحها من الكمية الموجودة في الخانة (1,1) فيتبقى فيها 10 وفي الأخير نضيفها إلى الخانة (1, 2) التي كانت أصلا فارغة فتصبح الكمية الموجودة فيها الآن 10 ونستغني عن طريق النقل (a_2,b_2) الذي يحل محله الطريق الجديد (a_2,b_1). وتصبح تكلفة شبكة النقل الجديدة (بعد المحاولة الثانية) هي: التكلفة الكلية للشبكة السابقة مطروحا منها تكلفة الكمية المحولة الجديدة إلى طريق النقل (a_2 ,b_1). أي: 240 و.ن - 4 .10 = 200 و.ن.

شبكة النقل الجديدة بعد المحاولة الثانية هي:

10	15	
10	×	20
	35	

نجري محاولة ثالثة من أجل تحديد هل النتيجة التي توصلنا إليها بعد المحاولة الثانية تمثل حلا أمثلا أم لا.

المحاولة الثالثة:

نكون الجداول الأربعة الضرورية لإجراء هذه المحاولة وذلك بالاعتماد على معطيات شبكة النقل المحصل عليها بعد المحاولة الثانية.

جدول -I-

				E_i
	3	2	-	3
	1	-	3	1
	-	2	-	3
F_J	0	- 1	2	

جدول -II-

				E_i
	-	-	5	3
	-	0	-	1
	3	-	5	3
F_J	0	- 1	2	

-	-	4
1	4	-
4	-	5

جدول -III-

-	-	-1
-	4	-
1	-	0

جدول -IV-

نلاحظ أن الجدول الرابع لا زال يحتوي على قيمة سالبة، وهي قيمة ($\Delta_{13} = -1$) وهذا يدل هنا أيضا على أنه بالرغم من تحسين الحل وتخفيض تكلفة النقل من 240 و.ن. إلى 200 لكننا لا زلنا لم نصل إلى الحل الأمثل. فنستمر في البحث عن حل أمثل، وذلك بإدخال طريق النقل (a_1 , b_3) إلى شبكة النقل السابقة وتحويل كمية ما إليه من طرق النقل المجاورة له باستخدام دورة التحويل التي تمكننا من تحويل كمية ما إلى الخانة ($i = 1, j = 3$). انطلاقا من طريق النقل الجديد الذي نريد إدخاله (a_1 ,b_3) وبمراعاة القواعد المشار إليها سابقا فإن حلقة التحويل تتكون من الخانات التالية: (1, 1) , (1 ,3) , (1, 2) , (3 ,2).

10 –	15	+
10 +		– 20
	35	

نحدد الآن أقل كمية من بين الكميات الموجودة في الخانات ذات الإشارة السالبة وهما الخانتين (1, 1)، (3, 3)، وطريق النقل (1, 1) هو الذي يحتوي على أقل كمية منقولة وهي (10). نضيف إذن (10) إلى الخانة (1, 2) فتصبح الكمية الموجودة فيها الآن 20، ونطرحها من الكمية 20 الموجودة في الخانة (3, 2) فيتبقى فيها 10 ثم نضع هذه الكمية في الخانة. والنتيجة هي أننا حولنا الكمية 10 من طريق النقل (a_1, b_1)، الذي يصبح غير مستعمل الآن، إلى طريق النقل (a_2, b_1) الذي يحل محله.

وتصبح تكلفة شبكة النقل الجديدة (بعد المحاولة الثالثة) هي: التكلفة الكلية للشبكة السابقة مطروحا منها تكلفة الكمية المحولة الجديدة إلى طريق النقل (a_1 ,.b_1) أي: 200 و.ن - 1 .10 = 190و.ن.

شبكة النقل الجديدة بعد المحاولة الثالثة هي:

	15	10
20		10
	35	

المحاولة الرابعة:

نكون الجداول الأربعة التي تسمح لنا بإجراء المحاولة الرابعة وذلك بالاعتماد على معطيات شبكة النقل المحصل عليها بعد المحاولة الثالثة.

جدول -I-

				E_i
	-	2	4	**2**
	1	-	3	**1**
	-	2	-	**2**
F_J	0	**0**	2	

جدول -II-

				E_i
	2	-	-	**2**
	-	1	-	**1**
	2	-	4	**2**
F_J	0	**0**	2	

3	-	-
-	4	-
4	-	5

جدول -III-

1	-	-
-	3	-
2	-	1

جدول -IV-

لقد اختفت القيم السالبة الآن من الجدول الرابع، وهذا يدل على أن الحل المتحصل عليه بعد المحاولة الثالثة هو حلا أمثلا لهذه المسألة. شبكة النقل الأرخص التي تسمح بنقل المنتج بأقل تكلفة كلية ممكنة هي الشبكة المحصل عليها بعد المحاولة الثالثة.

للتأكد من قيمة هذه التكلفة يمكن جمع قيم تكاليف النقل حسب هذه الشبكة كالتالي:

$$\text{Min } Z = 15.2 + 10.4 + 20\text{p}10.3 + 35.2 = 190$$

وهي نفس قيمة التكلفة الدنيا التي تحصلنا عليها عندما استخدمنا طريقة التجريب.

مثال 2:

مؤسسة إنتاجية ما تزود أربع زبائن لها بالمنتج الذي يتم إنتاجه في 6 وحدات إنتاجية، الكميات القصوى من الإنتاج التي تستطيع الوحدات الإنتاجية توفيرها، الطلب الأقصى للزبائن وكذلك التكلفة الأحادية لنقل هذا المنتج من الوحدات الإنتاجية إلى الزبائن معطاة بالجدول التالي:

							طلب الزبائن
	8	12	4	18	30	22	600
	18	6	14	28	24	16	450
	16	4	12	24	8	26	750
	28	22	4	16	6	10	650
عرض الوحدات الإنتاجية	500	400	250	450	300	550	2450 / 2450

المطلوب:

البحث عن شبكة النقل الأرخص التي تسمح للمؤسسة المذكورة من نقل المنتج إلى زبائنها بأقل تكلفة كلية ممكنة.

الحل :

1- إيجاد الحل الابتدائي باستعمال طريقة ز.ش.غ.

نبدأ في إشباع طلب الزبائن ابتداءا من الزاوية الشمالية الغربية وننتهي بالزاوية السفلى الشرقية. فنحصل على الطرق التالية المستخدمة لنقل المنتج (طرق النقل المشكلة للحل الابتدائي).

500	**100**					~~**600**~~	~~**100**~~	**0**	
	300	**150**				~~**450**~~	~~**150**~~	**0**	
		100	**450**	**200**		~~**750**~~	~~**650**~~	~~**200**~~	**0**
				100	**550**	~~**650**~~	~~**550**~~	**0**	
~~**500**~~	~~**400**~~	~~**250**~~	~~**450**~~	~~**300**~~	~~**550**~~				
0	~~**300**~~	~~**100**~~	**0**	~~**100**~~	**0**				
	0	**0**		**0**					

عدد الطرق المستعملة في هذا الحل الابتدائي تساوي 9 ومن أجل قبول هذا الحل يجب أن يكون هذا العدد ساويا للمقياس $(m + n - 1)$، أي: $4 + 6 - 1 =$ 9، إذن فهذا الحل الابتدائي مقبول، وتكلفته الكلية هي:

$$Z = 14 \,.\, 150 + 300 \,.\, 6 + 12 \,.\, 100 + 8 \,.\, 500 + 8 \,.\, 200 + 24 \,.\, 450 + 12 \,.\, 100 + 6 \,.\, 100 + 550 \,.\, 10 = 28800$$

2- تحسين الحل الابتدائي والبحث عن حل أمثل (باستعمال طريقة التحويل):

بالاعتماد على الحل الابتدائي المقبول نبدأ في البحث عن حل أمثل حسب هذه الطريقة.

المحاولة الأولى:

لدينا جدول الكميات المنقولة حسب الحل الابتدائي وجدول تكاليف النقل الأحادية (C_{ij}).

500	**100**				
	300	**150**			
		100	**450**	**200**	
				100	**550**

8	**12**	**4**	**18**	**30**	**22**
18	**6**	**14**	**28**	**24**	**16**
16	**4**	**12**	**24**	**8**	**26**
28	**22**	**4**	**16**	**6**	**10**

تشكيل الجداول الأول والثالث المطلوبين بعد حساب قيم E_i, F_j. مع افتراض أن $F_1 = 0$ عشوائيا.

$C_{11}=E_1+E_2$ $8 = E_1+0$ $E_1=8$	$C_{22}=E_2+F_2$ $6= E_2+4$ $E_2=2$	$C_{33}= E_3+F_3$ $12= E_3+12$ $E_3= 0$	$C_{35}= E_3+F_5$ $8= 0+F_5$ $F_5= 8$
$C_{12}= E_1+F_2$ $12= 8+F_2$ $F_2= 4$	C_{23} E_2+F_3 $14= 2+F_3$ $F_3= 12$	$C_{34} =E_3+F_4$ $24= 0+F_4$ $F_4 =24$	$C_{45}= E_4+F_5$ $6= E_4+8$ $E_4= 8$ $C_{46}= E_4+F_6$ $10= -2+F_6$ $F_6= 12$

نضيف الآن قيم E_i , F_j المحصل عليها إلى الجدول الأول.

							E_i
	8	12	–	–	–	–	8
	–	6	14	–	–	–	2
	–	–	12	24	8	–	0
	–	–	–	–	6	10	–2
F_j	0	4	12	24	8	12	

جدول - I -

قيم F_j , E_i

نحسب الآن قيم C'_{ij} حسب العبارة $C'_{ij} = E_i + F_j$ ونشكل الجدول -II-

$C'_{21} = E_2+F_1$ $= 2+0$ $= 2$	$C'_{13} = E_1+F_3$ $= 8+12$ $= 20$	$C'_{24} = E_2+F_4$ $= 2+24$ $= 26$	$C'_{14} = E_1+F_4$ $= 8+24$ $= 32$
$C'_{26} = E_2+F_6$ $= 2+12$ $= 14$	$C'_{16} = E_1+F_6$ $= 8+12$ $= 20$	$C'_{25} = E_2+F_5$ $= 2+8$ $= 10$	$C'_{15} = E_1+F_5$ $= 8+8$ $= 16$

	–	–	20	32	16	20	8
	2	–	–	26	10	14	2
	0	4	–	–	–	12	0
	–2	2	10	22	–	–	–2
F_j	0	4	12	24	8	12	

جدول – II -

قيم C'ij

نحسب الآن قيم الفروقات (Δ_{ij}) وننقلها إلى الجدول -IV-

$\Delta_{21} = C_{21} - C'_{21} = 18 - 2 = 16$	$\Delta_{15} = C_{15} - C'_{15} = 30 - 16 = 14$	$\Delta_{13} = C_{13} - C'_{13} = 4 - 20 = -16$	$\Delta_{25} = C_{25} - C'_{25} = 24 - 10 = 14$
$\Delta_{24} = C_{24} - C'_{24} = 28 - 26 = 2$	$\Delta_{16} = C_{16} - C'_{16} = 22 - 20 = 2$	$\Delta_{14} = C_{14} - C'_{14} = 18 - 32 = -14$	$\Delta_{26} = C_{26} - C'_{26} = 16 - 14 = 2$

وهكذا نحسب بقية (Δ_{ij}), ويكون الجدول الرابع كالتالي:

—	—	−16	−14	14	2
16	—	—	2	14	2
16	0	—	—	—	14
30	20	−6	−6	—	—

جدول – IV –

قيم (Δ_{ij})

إن الجدول الرابع يحتوي على عدة قيم سالبة وبالتالي فالحل الابتدائي المتوصل إليه يعتبر حلا غير أمثل، ويتعين بالتالي الاستمرار في البحث عن حل أمثل. نلاحظ أن أصغر قيمة سالبة من ضمن قيم (Δ_{ij}) في الجدول الرابع هي قيمة $\Delta_{13} = -16$.

فنأخذ الشبكة الممثلة للكميات المنقولة حسب الحل الابتدائي ونجري التحويل إلى الخانة ($i = 1, j = 3$).

500	100 −	+			
	+ 300	−150			
		100	450	200	
				100	550

فنحصل على الشبكة التالية:

500		100			
	400	50			
		100	450	200	
				100	550

وتصبح تكلفة الحل الجديد (بعد المحاولة الأولى) هي:

28800 - 16 . 100 = 27200 و. ن.

المحاولة الثانية:

							E_i
	8	–	4	–	–	–	8
	–	6	14	–	–	–	18
	–	–	12	24	8	–	16
	–	–	–	–	6	10	14
F_j	0	–12	–4	8	–8	–4	

جدول - I -

–	12	–	18	30	22
18	–	–	28	24	16
16	4	–	–	–	26
28	22	4	16	–	–

جدول - III -

							E_i
	–	–4	–	16	0	4	8
	18	–	–	26	10	14	18
	16	4	–	–	–	12	16
	14	2	10	22	–	–	14
F_j	0	–12	–4	8	–8	–4	

جدول - II -

–	16	–	2	30	18
0	–	–	2	14	2
0	0	–	–	–	14
14	20	–6	–6	–	–

جدول - IV -

بملاحظتنا للجدول الرابع نجد أن الحل السابق المتضمن في المحاولة الأولى لا يشكل حلا أمثلا نظرا لوجود قيم سالبة لـ Δ_{ij} في هذا الجدول، فنستمر إذن في البحث عن الحل الأمثل. هناك قيمتان سالبتان متساويتان لـ Δ_{ij} في الجدول الرابع $(\Delta_{43} = -6 \ , \ \Delta_{44} = -6)$، فنختار على سبيل المثال (Δ_{44}) على أنها أصغر قيمة ونجري التحويل إلى الخانة $(i = 4 , j = 4)$.

500		100			
	400	50			
		100	450 –	+ 200	
			+	– 100	550

ونحصل بعدها على شبكة النقل التالية:

500		100			
	400	50			
		100	350	300	
			100		550

وتصبح تكلفة الحل الجديد، بعد المحاولة II هي:

$27200 - 6 . 100 = 26600$ و.ن.

المحاولة الثالثة:

							E_i
	8	–	4	–	–	–	8
	–	6	14	–	–	–	18
	–	–	12	24	8	–	16
	–	–	–	16	–	10	8
F_j	0	–12	–4	8	–8	2	

جدول - I -

500		100			
	400	50			
		100	350	300	
			100		550

شبكة النقل السابقة

							E_i
	-	-4	-	16	0	10	8
	18	-	-	26	10	20	18
	16	4	-	-	-	18	14
	8	-4	4	-	0	-	8
F_j	0	-12	-4	8	-8	2	

جدول - II -

-	12	-	18	30	22
18	-	-	28	24	16
16	4	-	-	-	26
28	22	4	-	6	-

جدول - III -

-	16	-	2	30	12
0	-	-	2	14	- 4
0	0	-	-	-	8
20	26	0	-	6	-

جدول IV -

نلاحظ أنه مازالت هناك قيمة سـالبة في الجدول الرابع وهي ($\Delta_{26}= -4$).

فالحل السابق لا يشكل إذن حلا أمثلا، ونستمر في البحث عن حل أمثل، نجري التحويل إلى الخانة ($i = 2 , j = 6$)، ونحصل على شبكة نقل جديدة كالتالي:

500		100			
	400	50-			+
		100+	350-	300	
			+ 100		- 550

500		100			
	400				50
		150	300	300	
			150		500

والتكلفة الكلية الجديدة تصبح: **26400 = 50.4 – 26600** و.ن.

المحاولة الرابعة:

							E_i
	8	-	4	-	-	-	8
	-	6	-	-	-	16	14
	-	-	12	24	8	-	16
	-	-	-	16	-	10	8
F_j	0	-8	-4	8	-8	2	

جدول - I -

-	12	-	18	30	22
18	-	14	28	24	-
16	4	-	-	-	26
28	22	4	-	6	-

جدول - III -

							E_i
	–	0	–	16	0	10	8
	14	–	10	22	6	–	14
	16	8	–	–	–	18	16
	8	0	4	–	0	–	8
F_j	0	–8	–4	8	–8	2	

جدول - II -

–	12	–	2	30	12
4	–	4	6	18	–
0	– 4	–	–	–	8
20	22	0	–	6	–

جدول IV -

لازلنا لم نصل إلى الحل الأمثل نظرا لأنه لازالت هناك قيمة سالبة في الجدول الرابع وهي قيمة ($\Delta_{32}=-4$) فنستمر في البحث عن الحل الأمثل.

نجري التحويل إلى الخانة (**i = 3** , **j = 2**)، فنحصل على الشبكة التالية:

500		**100**			
	400-				**+50**
	+	**150**	- **300**	**300**	
			+ 150		**- 500**

500		**100**			
	100				**350**
	300	**150**		**300**	
			450		**200**

والتكلفة الكلية الجديدة تساوي **26400 – 4 . 300 = 25200 و.ن.**

المحاولة الخامسة:

جدول - I -

							E_i
	8	–	4	–	–	–	8
	–	6	–	–	–	16	18
	–	4	12	–	8	–	16
	–	–	–	16	–	10	12
F_j	0	–12	4–	4	–8	2–	

جدول - III -

–	12	–	18	30	22
18	–	14	28	24	–
16	–	–	24	–	26
28	22	4	–	6	–

جدول - II -

							E_i
	–	4–	–	12	0	6	8
	18	–	14	22	10	–	18
	16	–	–	20	–	14	16
	12	0	8	–	4	–	12
F_j	0	–12	4–	4	–8	2–	

جدول - IV -

–	16	–	6	30	16
0	–	0	6	14	–
0	–	–	4	–	12
16	22	–4	–	2	–

مازال هناك قيمة سالبة في الجدول الرابع وهي ($\Delta_{43} = -4$) ، وبالتالي فالحل الناتج عن المحاولة الرابعة لا يشكل حلا أمثلا. فنستمر في البحث ونجري الآن التحويل إلى الخانة ($i = 4$, $j = 3$).

500		100			
	100 -				+350
	+ 300	− 150		300	
		+	450		− 200

500		100			
					450
	400	50		300	
		100	450		100

وتصبح التكلفة الكلية الجديدة هي: **25200 – 4 . 100 = 24800 و.ن**

المحاولة السادسة:

جدول - I -

							E_i
	8	−	4	−	−	−	**8**
	−	−	−	−	−	16	**14**
	−	4	12	−	8	−	**16**
	−	−	4	16	−	10	**8**
F_J	0	12−	4−	8	−8	2	

جدول - III -

−	12	−	18	30	22
18	6	14	28	24	−
16	−	−	24	−	26
28	22	−	−	6	−

جدول - II -

							E_i
	-	-4	-	16	0	10	8
	14	2	10	22	6	-	14
	16	-	-	24	-	18	16
	8	-4	-	-	0	-	8
F_J	0	12-	4-	8	-8	2	

جدول - IV -

-	16	-	2	30	12
4	4	4	6	18	-
0	-	-	0	-	8
20	18	-	-	6	-

الآن اختفت القيم السالبة من الجدول الرابع وهذا يدل على أن الحل المتحصل عليه بعد المحاولة الخامسة يشكل حلا أمثلا لهذه المسألة، بتكلفة نقل كلية = **24800**. أي:

Z= 500 . 8 +100 . 4 +450 . 16 + 400 . 4 + 50 . 12 + 300 . 8 + 100 . 4 + 450. 16 + 100. 10 = 24800 و.ن

مثال 3:

المطلوب حل مسألة النقل التالية وفق المعطيات الواردة في الجدول أدناه:

1	4	0	4
2	3	2	6
3	2	2	8
4	0	1	6
6	8	10	24 / 24

الحل الابتدائي: نبحث عن الحل الابتدائي باستخدام طريقة الزاوية ش.غ. فنحصل على الشبكة التالية:

4			0
2	4		0
	4	4	0
		6	
0	0	0	

عدد طرق النقل المستخدمة في هذا الحل يساوي 6 وهو نفس العدد المطلوب وفق المقياس **n+m-1**، فالحل الابتدائي **مقبول**، تكلفة شبكة النقل لهذا الحل الابتدائي تساوي 42 و.ن.

يمكن البحث عن الحل الأمثل باستعمال أي من الطرق المشار إليها سابقا.

إيجاد الحل الأمثل باستعمال طريقة التحويل:

نستعمل طريقة التحويل للبحث عن الحل الأمثل.

المحاولة I: **جدول** $-C_{ij}-$ **جدول الحل الابتدائي**

1	4	0
2	3	2
3	2	2
4	0	1

4		
2	4	
	4	4
		6

جدول – I –

				E_i
	1	**–**	**–**	**1**
	2	**3**	**–**	**2**
	–	**2**	**2**	**1**
	–	**–**	**1**	**0**
F_j	**0**	**1**	**1**	

جدول – III –

–	**4**	**0**
–	**–**	**2**
3	**–**	**–**
4	**0**	**–**

جدول - IV -

–	2	2–
–	–	1–
2	–	–
4	1–	–

جدول - II -

				E_i
	–	2	2	1
	–	–	3	2
	1	–	–	1
	0	1	–	0
F_j	0	1	1	

يظهر في الجدول الرابع عدة قيم سالبة وبالتالي فالحل الابتدائي السابق لا يعتبر حلا أمثلا، ويجب مواصلة الحل بإدخال طريق النقل (**A_1,B_3**) إلى شبكة النقل وتكوين دورة تحويل لملئه بكمية منقولة من طرق النقل المستخدمة حاليا.

4 -		+
2 +	- 4	
	4 +	- 4
		6

نظرا لأن الكميات الموجودة في طرق النقل ذات الإشارة السالبة هي كلها متساوية، فإن محاولة ملء طريق النقل (A_1,B_3) بإحدى هذه الكميات يترتب عليها انخفاض عدد طرق النقل المستعملة إلى أربعة فقط وهو عدد لا يساوي n+m-1 الذي يتطلب ستة طرق.

لذلك لا يمكن قبول الحل المحصل عليه ويجب أولا إعادة مستوى عدد طرق النقل إلى العدد المطلوب (6). نتفحص الخانات الثلاثة التي أصبحت فارغة وهي (A_1,B_1)، (A_2,B_2)، (A_3,B_3) ونختار منهم خانتين ذات تكلفة النقل الأصغر ونحتفظ بهما في شبكة النقل بكميات منقولة تساوي **صفر**، هاتين الخانتين هما (**A_1,B_1**) و(**A_3,B_3**).

أما الخانة الأخرى (A_3,B_3)، فننقل الكمية الموجودة فيها إلى طريق النقل (**A_1,B_3**). نحصل بعد ذلك على شبكة النقل التالية:

0		**4**
6		
	8	**0**
		6

وتصبح تكلفة النقل لهذه الشبكة الجديدة = **42 – 2 × 4 = 34و.ن.**

المحاولة II:

جدول –C_{ij}–

1	4	0
2	3	2
3	2	2
4	0	1

جدول الحل السابق.

0		4
6		
	8	0
		6

جدول - I -

				E_i
	1	**–**	**0**	**0**
	2	**–**	**–**	**2**
	–	**2**	**2**	**2**
	–	**–**	**1**	**1**
F_j	**0**	**0**	**0**	

جدول - III -

–	**4**	**–**
–	**3**	**2**
3	**–**	**–**
4	**0**	**–**

جدول - II -

				E_i
	-	**0**	**-**	**0**
	-	**2**	**2**	**2**
	2	**-**	**-**	**2**
	1	**1**	**-**	**1**
F_j	**0**	**0**	**0**	

جدول - IV -

-	**4**	**-**
-	**1**	**0**
1	**-**	**-**
3	**1-**	**-**

يظهر في الجدول الرابع قيمة سالبة واحدة وبالتالي فالحل السابق لا يعتبر حلا أمثلا، ويجب مواصلة الحل بإدخال طريق النقل (A_4,B_2) إلى شبكة النقل وتكوين دورة تحويل لملئه بكمية منقولة من طرق النقل المستخدمة حاليا. شكل دورة التحويل هو كالتالي:

0		4
6		
	8-	+ 0
	+	- 6

نحصل بعد التحويل على شبكة النقل التالية بتكلفة كلية تساوي

34 – 1×0 = 28 و.ن.

0		4
6		
	2	6
	6	

المحاولة III:

جدول الحل السابق

0		4
6		
	2	6
	6	

جدول $-C_{ij}-$

1	4	0
2	3	2
3	2	2
4	0	1

جدول - III -

–	4	–
–	3	2
3	–	–
4	–	1

جدول - I -

				E_i
	1	–	0	1
	2	–	–	2
	–	2	2	3
	–	–	1	1
F_j	0	1–	1–	

				E_i
	–	0	–	1
	–	1	1	2
	3	–	–	3
	1	–	0	1
F_j	0	1–	1–	

جدول - II -

–	4	–
–	2	1
0	–	–
3	–	1

جدول - IV -

أصبح الجدول الرابع خاليا من القيم السالبة وبالتالي فالحل المحصل عليه في المحاولة السابقة يعتبر حلا أمثلا و يساوي **28** و.ن.

المبحث الثاني

حل مسألة النقل باستعمال طريقة التكاليف الصغرى

Méthode des moindres couts

هذه الطريقة تستعمل في إيجاد المرحلة الأولى من الحل وهو الحل الابتدائي، وعادة ما تعطي حلا ابتدائيا قريبا جدا من الحل الأمثل.

في هذه الطريقة، اختيار الخانة التي نبدأ بها الحل يتم عن طريق قيم تكاليف النقل الوحدوية (C_{ij})، حيث نقوم بتقسيم خانات جدول النقل إلى نصفين، ثم نأخذ جدول التكاليف الأحادية لنقل المنتج (C_{ij})، وعوض ما نذهب في كل مرة إلى الخانة أو الزاوية الشمالية الغربية –كما في الطريقة السابقة– نختار دائما الخانة ذات تكلفة النقل الأصغر ونملؤها، وذلك بوضع تكلفة نقل الوحدة في الزاوية العليا إلى اليمين من هذه الخانة والكمية المنقولة من المنتج (X_{ij})، التي من المفروض أن يتم نقلها عبر الطريق المختار، في الزاوية السفلى إلى اليسار من الخانة.

الكمية المنقولة (X_{ij}) التي نضعها في طريق النقل المختار تساوي أصغر الكميتين (a_i) أو (b_j) المقابلتين لهذه الخانة المختارة في الجدول السابق، أي أقل كمية مقابلة لها في عمود أو سطر الاحتياجات والكميات المتوفرة. يعني:

$X_{ij} = \min (a_i , b_j)$، ونستمر هكذا ....

نتعرض لهذه الطريقة عبر نفس المثالين السابقين اللذين تناولناهما في المباحث السابقة.

نبدأ بالمثال الأول السابق.

	B_1	B_2	B_3	
25	3	2	4	A_1
30	1	4	3	A_2
35	4	2	5	A_3
	20	50	20	

الخانة التي تحتوي على أقل تكلفة أحادية هي ($C_{21}= 1$)، فنضع فيها أقل كمية مقابلة لها في عمود وسطر الاحتياجات والكميات المتوفرة، أي: $X_{21} = \min (a_2 , b_1)$، يبقى في الصف المقابل لهذه الخانة كمية مقدارها 10 وحدات وفي العمود المقابل كمية تساوي الصفر.

القيمة الصغيرة الآن من ضمن قيم التكاليف الأحادية في الجدول موجودة في الخانتين ($C_{12} = 2$) و($C_{32} = 2$) وهما قيمتان متساويتان، فنأخذ عشوائيا مثلا الخانة (C_{32}): الكميات المقابلة لها هي ($a_3 = 35$) و($b_2 = 50$) وأصغرهما هي 35 $= a_3$ فنضعها في الخانة المختارة (C_{32}). فينتج الجدول التالي:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	3	2	4	25
A_2	1 / 20	4	3	10
A_3	4	2	5	35
	0	50	20	

ثم نتبع نفس الطريقة فنحصل على الجداول التالية:

	b_1	b_2	b_3	
a_1	3	2	4	25
a_2	1 / 20	4	3	10
a_3	4	2 / 35	5	0
	0	15	20	

	b_1	b_2	b_3	
a_1	3	2 / 15	4	10
a_2	1 / 20	4	3	10
a_3	4	2 / 35	5	0
	0	0	20	

	b_1	b_2	b_3	
a_1	3	2 / 15	4	10
a_2	1 / 20	4	3 / 10	0
a_3	4	2 / 35	5	0
	0	0	10	

	b_1	b_2	b_3	
a_1	3	2 / 15	4 / 10	0
a_2	1 / 20	4	3 / 10	0
a_3	4	2 / 35	5	0
	0	0	0	

شبكة النقل والكميات المنقولة في الحل الابتدائي حسب هذه الطريقة هي:

$\mathbf{X_{11} = 0 , X_{12} = 15 , X_{13} = 10}$

$\mathbf{X_{21} = 20 , X_{22} = 0 , X_{23} = 10}$

$\mathbf{X_{31} = 0 , X_{32} = 35 , X_{33} = 0}$

وتكون تكلفة النقل الكلية للحل الابتدائي هي:

$(2 . 15 + 4 . 10)/a_1 + (1 . 20 + 3 . 10)/a_2 + (2 . 35)/a_3 = \mathbf{190}$ و.ن.

نختبر الآن هل هذا الحل مقبول أم لا: نلاحظ أن عدد الطرق النقل المستعملة فيه تساوي **5** وهو يساوي $m + n - 1$. فهذا الحل هو إذن مقبول.

نحاول الآن أن نرى إذا ما كان هذا الحل قابل للتحسين أم لا: أي نبحث عن الحل الأمثل.

إيجاد الحل الأمثل باستعمال طريقة التحويل:

نستعمل الآن طريقة التحويل لإيجاد الحل الأمثل للمثال السابق.

المحاولة I:

جدول -C_{ij}-

3	2	4
1	4	3
4	2	5

جدول الحل الابتدائي.

	15	10
20		10
	35	

جدول - I -

				E_i
	–	2	4	2
	1	–	3	1
	–	2	–	2
F_j	0	0	2	

جدول - III -

3	–	–
–	4	–
4	–	5

جدول - II -

				E_i
	2	-	-	2
	-	1	-	1
	2	-	4	2
F_j	0	0	2	

جدول - IV -

1	-	-
-	3	-
2	-	1

نلاحظ أن الجدول الرابع لا يحتوي على قيم سالبة وبالتالي فالحل الابتدائي الأسبق هو حل أمثل لهذا المثال بتكلفة نقل كلية تساوي 190 و.ن.

مثال 2: نحل هذا المثال أيضا باستعمال طريقة التكاليف الصغرى.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	8	12	4	18	30	22	600
A_2	18	6	14	28	24	16	450
A_3	16	4	12	24	8	26	750
A_4	28	22	4	16	6	10	650
	500	400	250	450	300	550	

البحث عن الحل الابتدائي:

نستخدم طريقة التكاليف الصغرى.

خطوة4	خطوة1	خطوة2	8 و 7	خطوة3	6 و 5	ترتيب الحل
8 / 500	12	4	18 / 100	30	22	600 100 0
18	6	14	28	24	16 / 450	450 0
16	4 / 400	12	24 / 350	8	26	750 350 0
28	22	4 / 250	16	6	10 / 100	650 400 100 0
500 0	400 0	250 0	450 350 0	300 0	550 450 0	

إذن فالحل الابتدائي يتكون من طرق النقل التالية:

$100 = A_4B_6$, $300 = A_4B_5$, $250 = A_4B_3$, $400 = A_3B_2$, $450 = A_2B_5$, $100 = A_1B_4$, $300 = A_4B_5$.

وتكلفته الكلية = **26800** و.ن.

ولكن نلاحظ هنا أن عدد طرق النقل المستخدمة في هذا الحل (وهي8) لا تساوي (m+n-1) أي أن: $8 \neq 9 = m + n - 1$.

إذن فهذا الحل الابتدائي **غير مقبول**، ولا نستطيع الاعتماد عليه في البحث عن حل أمثل للمسألة المطروحة. وفي هذه الحالة من أجل التخلص من هذا العائق نعيد تتبع خطوات الحل الابتدائي من أجل الإشارة إلى **مصدر** هذا المشكل (انخفاض عدد طرق النقل المستخدمة عن m+n-1) وكيف يتم معالجته.

نلاحظ أنه عند البحث عن الحل الابتدائي،وعندما نصل إلى الخطوة رقم 6: الخانة ذات التكلفة الأقل من بين الخانات المتبقية هي الخانة (A_2 , B_6). الكميات التي تقابلها (المعروضة والمطلوبة) **متساويتان،** أي أن ($b_6 = a_2 = 450$) وينتج عن ملء هذه الخانة بالكمية 450 أن تصبح ($b_6 = a_2 = 0$) وهذا يتطلب **شطب** العمود السادس والصف الثاني لأن كليهما أصبح مشبعا. إن هذا الشطب المتزامن للعمود السادس وللصف الثاني هو الذي يترتب عليه انخفاض عدد طرق النقل المستخدمة في الحل عن العدد المطلوب وفق المقياس ($m+n-1$). ولو تكررت هذه المشكلة خلال الحل مرة أو مرتين أو أكثر وقمنا على إثرها في كل مرة بشطب العمود والصف مع بعض لأدى ذلك إلى انخفاض عدد طرق النقل عن العدد المطلوب عدة مرات.

لمعالجة هذا المشكل فإنه عندما تصبح الكمية ($\mathbf{a_i}$) والكمية ($\mathbf{b_j}$) المقابلة للخانة التي نريد ملأها **متساويتان** فإنه بعد ملء الخانة المعنية لا يجب شطب الصف والعمود اللذين يتقاطعان عند هذه الخانة مع بعض بل يجب شطب أحدهما فقط. من أجل الاختيار من الصف أو العمود الذي يجب شطبه ننظر إلى الخانات التي لا زالت فارغة في الصف والعمود المعنيين، ونشطب الصف أو العمود الذي يحتوي على أكبر تكاليف النقل للخانات التي لا زالت فارغة فيه ونترك ذلك الذي يحتوي على خانات فارغة تكاليف نقلها هي الأصغر.

بالرجوع إلى مثالنا، نلاحظ أنه بعد ملء الخانة (A_2 , B_6) يتبقى في الصف الثاني خانة واحدة فارغة وتكلفة نقلها تساوي 28، بينما الخانات الفارغة في العمود السادس هي ذات تكاليف (26, 22)، وواضح أنه يجب شطب الصف وإبقاء

العمود، ولكن بكمية مقابلة له تساوي الصفر. هذه الكمية الصفرية نضعها داخل إطار حتى نميزها عن الأصفار الأخرى ونتعامل معها على أنها كمية منقولة حقيقية، ثم نواصل الحل حسب هذه الطريقة بصفة عادية. يترتب على مواصلة الحل بهذا المنهج أن عدد طرق النقل المستخدمة سوف يكون مساويا للعدد المطلوب وفق المقياس (m+n-1)، ولكن أحد الطرق سوف تكون الكمية المنقولة فيه تساوي صفرا ويجب التعامل معها على أنها كمية منقولة حقيقية. الجدول التالي يوضع معالجة مشكل عدم قبولية الحل الابتدائي الناتجة عن انخفاض عدد طرق النقل تحت العدد المطلوب.

4	1	2	8 و7	3	6 و 5	ترتيب الحل
8 500	12	4	18 100	30	22	600 100 0
18	6	14	28	24	16 450	450 0
16	4 400	12	24 350	8	26 0	750 350 0
28	22	4 250	16	6	10 100	650 400 100 0
500 0	400 0	250 0	450 350 0	300 0	550 450 [0]	

نلاحظ الآن أن عدد طرق النقل المستعملة في الحل الابتدائي يساوي تسعة وهو العدد المطلوب وفق المقياس (m+n-1)، وبالتالي فالحل الابتدائي مقبول وتكلفته تساوي 26800 و.ن.

البحث عن الحل الأمثل:

نستخدم في البحث عن الحل الأمثل طريقة التحويل.

المحاولة الأولى:

لدينا الجدول الممثل لطرق النقل حسب الحل الابتدائي، وجدول تكاليف النقل الأحادية (C_{ij}).

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	8	12	4	18	30	22
A_2	18	6	14	28	24	16
A_3	16	4	12	24	8	26
A_4	28	22	4	16	6	10

350			100		
					450
	400		350		0
		250		300	100

							E_i
	8	–	–	18	–	–	8
	–	–	–	–	–	16	4
	–	4	–	24	–	26	14
	–	–	4	–	6	10	2–
F_j	0	–10	6	10	8	12	

جدول - I-

–	12	4	–	30	22
18	6	14	28	24	–
16	–	12	–	8	–
28	22	–	16	–	–

جدول III-

							E_i
	–	2–	14	–	16	20	8
	4	– 6	10	14	12	–	4
	14	–	20	–	22	–	14
	−2	−12	–	8	–	–	2–
F_j	0	−10	6	10	8	12	

جدول - II -

–	14	−10	–	14	2
14	12	4	14	12	–
2	–	−8	–	−14	–
30	34	–	8	–	–

جدول - IV -

نذهب إلى شبكة النقل المحصل عليها في الحل الابتدائي ونجري التحويل إلى طريق النقل (a_3 , b_5)، فنحصل على الشبكة الجديدة التالية:

500			100		
					450
	400		350	+	– 0
		250		300 –	+ 100

500			100		
					450
	400		350	0	
		250		300	100

الشيء الذي يجب الإشارة إليه هنا هو أن حلقة التحويل المكونة تحتوي على كميتين موجودتين في الخانتين التي على رؤوسها إشارات سالبة، إحدى هذين الكميتين هي (**0**)– نعتبر أن أصغر كمية من بينهما هي الكمية **صفر** وبالتـالي يجب

تحويل الصفر من طريق النقل (A_3 , B_6) إلى طريق النقل (A_3 , B_5) عبر دورة التحويل.

ينتج عن هذه المحاولة شبكة نقل جديدة تكلفتها الكلية هي:

26800 – 14. (0) = 26800 و.ن.

المحاولة الثانية:

							E_i
	8	–	–	18	–	–	8
	–	–	–	–	–	16	18
	–	4	–	24	8	–	14
	–	–	4	–	6	10	12
F_j	0	−10	8–	10	6–	2–	

جدول - I -

–	12	4	–	30	22
18	6	14	28	24	–
16	–	12	–	–	26
28	22	–	16	–	–

جدول - III -

							E_i
	–	2–	0	–	2	6	8
	18	8	10	28	12	–	18
	14	–	6	–	–	12	14
	12	2	–	22	–	–	12
F_j	0	−10	8–	10	6–	2–	

جدول - II -

–	14	−10	–	28	16
0	2–	4	0	12	–
2	–	−8	–	–	14
16	20	–	6–	–	–

جدول - IV -

نذهب إلى شبكة النقل المحصل عليها في المحاولة الأولى ونجري التحويل إلى طريق النقل (A_4 , B_4)، فنحصل على الشبكة الجديدة التالية:

500			100		
					450
	400		350 −	+ 0	
		250	+	− 300	100

500			100		
					450
	400		50	300	
		250	300		100

التكلفة الكلية لشبكة النقل الجديدة هي: 26800−6×300= 25000**و.ن.**

المحاولة الثالثة:

							E_i
	8	–	–	18	–	–	8
	–	–	–	–	–	16	12
	–	4	–	24	8	–	14
	–	–	4	16	–	10	6
F_j	0	–	2–	10	6–	4	

جدول - I -

–	12	4	–	30	22
18	6	14	28	24	–
16	–	12	–	–	26
28	22	–	–	6	–

جدول -

							E_i
	–	2–	6	–	2	12	8
	12	2	10	22	6	–	12
	14	–	12	–	–	18	14
	6	4–	–	–	0	–	6
F_j	0	−10	2–	10	6–	4	

جدول - II -

–	14	−2	–	28	10
6	4	4	6	18	–
2	–	0	–	–	8
22	26	–	–	6	–

جدول - IV -

نذهب إلى شبكة النقل المحصل عليها في المحاولة الثانية ونجري التحويل إلى طريق النقل (A_1 , B_3)، فنحصل على الشبكة الجديدة التالية:

500		+	−100		
					450
	400		50	300	
		250 −	+ 300		100

500		100			
					450
	400		50	300	
		150	400		100

التكلفة الكلية لشبكة النقل الجديدة هي:25000−2× 100= 24800**و.ن.**

المحاولة الرابعة:

							E_i
	8	−	4	−	−	−	8
	−	−	−	−	−	16	14
	−	4	−	24	8	−	16
	−	−	4	16	−	10	8
F_j	0	−	4−	8	8−	2	

جدول - I -

−	12	−	18	30	22
18	6	14	28	24	−
16	−	12	−	−	26
28	22	−	−	6	−

جدول III-

							E_i
	−	4−	−	16	0	10	8
	14	2	10	22	6	−	14
	16	−	12	−	−	18	16
	8	4−	−	−	0	−	8
F_j	0	−12	4−	8	8−	2	

جدول - II -

−	16	−	2	30	12
4	4	4	6	18	−
0	−	0	−	−	8
20	26	−	−	6	−

جدول - IV -

نلاحظ أن الجدول الرابع لا يحتوي على القيم السالبة، وبالتالي فالحل المتحصل عليه في المحاولة الثالثة هو الحل الأمثل (**24800** و.ن)، وهو يمثل أدنى تكلفة نقل يمكن الوصول إليها

المبحث الثالث

حل مسألة النقل باستعمال طريقة الفروقات الكبرى

La Méthode des différences maximales

طريقة الفروقات الكبرى أو طريقة فوجل (R.w. Fogel) تسمح بإيجاد حل ابتدائي عادة ما يكون قريبا من الأمثل. البحث عن الحل الابتدائي وفق هذه الطريقة يتكون من الخطوات التالية:

1- في كل صف وعمود من جدول التكاليف الأحادية (C_{ij}) لمسألة النقل نقوم بتحديد أصغر تكلفتين للنقل.

2- نجد الفرق بين هذين التكلفتين.

3- نبدأ الحل دائما من الصف أو العمود الذي يقابله **أكبر** فرق، وفي هذا الصف أو العمود نبحث عن أصغر تكلفة نقل (C_{ij}).

4- نقوم بملء هذه الخانة ذات التكلفة الأصغر **بأقل** الكميتين ($\mathbf{b_j}, \mathbf{a_i}$) التي تقابلها: $\mathbf{min}\ (\mathbf{a_i}, \mathbf{b_j})$

5- بعد هذا نشطب الصف أو العمود الذي أشبع تماما، ثم نذهب إلى الفرق الأصغر من السابق مباشرة ونعيد العمليات السابقة من جديد حتى تستهلك كل الكميات المتاحة لدى المصادر وتشبع كل احتياجات المستعملين.

6 – في حالة وجود عدة فروق كبرى متساوية، يجب أن نختار ذلك الفرق الذي يقابل العمود أو الصف الذي توجد به أصغر تكلفة نقل (C_{ij})، أي طريق النقل الأرخص وإذا كانت الخانات ذات التكلفة الأصغر أيضا متعددة، فنختار تلك التي يكون مجموع الفروق المقابلة لها في الصف والعمود هو الأكبر.

7- إذا كانت التكلفتان الصغيرتان في العمود أو الصف متساويتين، فيمكن أن نحسب الفرق بينهما (صفر) ويصبح هذا الصفر هو أصغر فرق من بين الفروقات، أو نحسب الفرق بين إحدى هذين التكلفتين والتكلفة الأكبر منها مباشرة، وكلاهما صحيح.

مثال1: نستعمل طريقة "الفروقات الكبرى" في حل المثال الأول السابق. نقوم بحساب الفروقات بين أصغر قيم التكاليف في الأعمدة والصفوف. هذه الفروقات تظهر فوق الجدول وعلى يساره.

بعد هذا نبدأ في ملء الخانات ذات التكاليف الأقل التي تقابلها أكبر الفروقات.

هناك أربع فروقات كبرى متساوية وقيمتها (2)، نلاحظ أن الفرقين الكبيرين المقابلين للصف الثاني والعمود الأول هما اللذان يوجد فيهما الخانات ذات التكلفة الأصغر التي قيمتها (**1**). لكن الخانة ذات التكلفة الأقل الموجودة في العمود الأول هي نفسها الموجودة في الصف الثاني (**1**)، وحتى قيم بقية الخانات الموجودة في الصف الثاني والعمود الأول هي متساوية. لذلك نختار عشوائيا الفرق المقابل للصف الثاني.

في هذا الصف أصغر تكلفة نقل هي (**1**) وهي موجودة في الخانة (A_2, B_1)، فنملأها بـ (**20**) وحدة وهي أقل القيمتين (**20,30**).

نشطب بعدها العمد الأول (B_1) لأنه اشبع تماما، أما الصف الثاني فما زال يحتاج إلى 10 وحدات من المنتج. بعد ذلك يبقى الفرقين الكبيرين (2) المقابلين للصف الثالث والعمود الثاني، ونلاحظ هنا أيضا أن الخانة ذات التكلفة الأصغر هي نفسها في العمود والصف المذكورين، فنختار عشوائيا الفرق المقابل للصف الثالث. نواصل الحل بنفس المنهج حتى الوصول إلى نهاية الحل.

		Δ=2	Δ=2	Δ=1	
		B_1	B_2	B_3	
Δ=1	A_1	3	2	4	25
Δ=2	A_2	1 20	4	3	10
Δ=2	A_3	4	2	5	35
		0	50	20	

ثم نذهب إلى الفرق المقابل للصف الثالث، ثم المقابل للعمود الثاني، العمود الثالث وننهي الحل بالفرق المقابل للصف الأول. فنحصل على الجداول التالية:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	3	2	4	25
A_2	1 20	4	3	10
A_3	4	2 35	5	0
	0	15	20	

	B_1	B_2	B_3	
A_1	3	2 15	4	10
A_2	1 20	4	3	10
A_3	4	2 35	5	0
	0	0	20	

	B 1	B 2	B 3	
A 1	3	2 / 15	4 / 10	0
A 2	1 / 20	4	3 / 10	0
A 3	4	2 / 35	5	0
	0	0	0	

	B 1	B 2	B 3	
A 1	3	2 / 15	4	10
A 2	1 / 20	4	3 / 10	0
A 3	4	2 / 35	5	0
	0	0	10	

شبكة النقل والكميات المنقولة في الحل الابتدائي حسب هذه الطريقة هي:

$X_{11} = 0$,$X_{12} = 15$,$X_{13} = 10$

$X_{21} = 20$,$X_{22} = 0$,$X_{23} = 10$

$X_{31} = 0$,$X_{32} = 35$,$X_{33} = 0$

وتكون تكلفة النقل الكلية للحل الابتدائي هي:

$(2 . 15 + 4 . 10)/a_1 + (1 . 20 + 3 . 10)/a_2 + (2 . 35)/a_3 = 190$ و.ن

نختبر الآن هل هذا الحل مقبول أم لا: نلاحظ أن عدد الطرق النقل المستعملة فيه يساوي **5** وهو يساوي $m + n - 1$. فهذا الحل هو إذن مقبول.

مثال2:

1 – البحث عن الحل الابتدائي: نستعمل طريقة الفروقات الكبرى.

	B 1	B 2	B 3	B 4	B 5	B 6	
A 1	8	12	4	18	30	22	600
A 2	18	6	14	28	24	16	450
A 3	16	4	12	24	8	26	750
A 4	28	22	4	16	6	10	650
	500	400	250	450	300	550	

نحسب الفروقات بين أصغر تكلفتين في كل صف وفي كل عمود ونسجلهم في أعلى الجدول وعلى يساره.

	8	2	8	2	2	6			
4	8 350	12	4 250	18	30	22	600	350	0
8	18	6 400	14	28 50	24	16	450	50	0
4	16 150	4	12	24 300	8 300	26	750	450	300
2	28	22	4	16 100	6	10 550	650	100	0
	500 150 0	400 0	250 0	450 350 0	300 0	550 0			

عدد طرق النقل المستخدمة في الحل الابتدائي المحصل عليه بواسطة طريقة (Fogel) يساوي 9 وهو يساوي العدد المطلوب حسب المقياس (m+n-1) الذي يتطلب عدد من طرق النقل يساوي (6 + 4 -1) = 9، فالحل الابتدائي إذن مقبول وتكلفة شبكة النقل حسب هذا الحل الابتدائي تساوي 26700 و.ن. يجب مواصلة الحل بالبحث عن حل أمثل سواء باستخدام طريقة التحويل أو طريقة التجريب.

القسم الثاني

حالة العرض $\neq$ الطلب (النموذج المفتوح)

إلى حد الآن، تعرضنا للحالة عندما كان مجموع ما هو متوفر في أماكن التموين يساوي مجموع الاستهلاك أو مجموع ما يطلبه المستعملون، أي: $\sum a_i = \sum b_j$.

ولكن في الواقع هذه الحالة ليست الوحيدة، ففي الواقع توجد هناك حالتين أخريين، تعكسان حالة عدم تساوي العرض الكلي مع الطلب الكلي، وفي مثل هذه الحالات لا يمكن حل مسألة النقل إلا إذا تم إعادة التوازن بين العرض الكلي مع الطلب الكلي.

الحالة الأولى: مجموع ما هو متوفر (مجموع العرض) أكبر من مجموع الكميات المستهلكة (مجموع الطلب) $\sum a_i < \sum b_j$.

في هذه الحالة ومن أجل إعادة التوازن بين العرض والطلب، يتعين إضافة مستعمل وهمي ($\mathbf{A}_{m+1}$) بكمية مطلوبة ($\mathbf{a}_{m+1}$) تساوي الفرق بين مجموع الطلب ومجموع العرض وبتكاليف نقل أحادية (C_{ij}) تساوي الصفر. وظيفة هذا المستعمل الوهمي أو الافتراضي هي امتصاص الكمية المعروضة الفائضة عن حاجة المستعملين الحاليين.

الحالة الثانية: حالة مجموع الطلب أكبر من مجموع العرض. أي: $\sum a_i > \sum b_j$. وفي هذه الحالة نضيف مصدر تموين وهمي ($\mathbf{B}_{n+1}$) بكمية معروضة ($\mathbf{b}_{n+1}$) تساوي الفرق بين مجموع الطلب والعرض، وبتكاليف نقل أح

ادية (C_{ij}) صفرية.

بعد إعادة التوازن للمسألة يمكن حلها بصفة عادية بأي من الطرق المشار إليها سابقا، وبعد حل المسألة نتغاضى عن المستعمل أو الممون الوهمي.

ملاحظة:

1- التكاليف الأحادية الصفرية (تكاليف الصف أو العمود الوهمي) تعتبر مثل غيرها من التكاليف الأحادية في جدول النقل، فهي تعتبر التكاليف الدنيا في الصف أو العمود الذي توجد فيه.

2- في طريقة الفروقات الكبرى ، حساب الفرق بين أقل التكلفتين في كل صف و في كل عمود يجب أن يأخذ بعين الاعتبار التكلفة الصفرية.

3- في طريقة التكاليف الصغرى، التكلفة الصفرية تعتبر أقل تكلفة ممكنة في الصف أو العمود الموجودة فيه هذه التكلفة التي تبدأ منها عملية التحويل.

مثال1 على الحالة الأولى: لدينا ثلاث مصادر للتموين بمنتج معين وثلاث مستعملين لهذا المنتج. تكاليف النقل الأحادية (C_{ij}) وكذلك الكميات المطلوبة والمعروضة معطاة بالجدول التالي:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	5	2	3	15
A_2	2	4	6	25
A_3	5	3	3	35
	20	20	45	75 / 85

المطلوب: تحديد أرخص شبكة للنقل تمكن من نقل المنتج المعني من مصادر تواجده إلى مستعمليه بأقل تكلفة ممكنة.

نلاحظ أن مجموع العرض يساوي 85 وهو أكبر من مجموع الطلب الذي يساوي 75. من أجل حل هذه المسألة يجب إضافة مستعمل رابع (وهمي) بكمية مطلوبة تساوي 85 - 75 = 10 وحدات، وذلك بإضافة صف إضافي بتكاليف أحادية صفرية. ويصبح الجدول التالي يمثل مسألة نقل متوازنة حيث العرض=الطلب.

	B_1	B_2	B_3	
A_1	5	2	3	15
A_2	2	4	6	25
A_3	5	3	3	35
A_4	0	0	0	10
	20	20	45	85 / 85

يمكن الآن حل المسألة بأي من الطرق المشار إليها سابقا.

الحل الابتدائي: نجد الحل الابتدائي باستخدام طريقة الفروقات الكبرى.

		2	2	3	
		B_1	B_2	B_3	
1	A_1	5	2 (15)	3	0
2	A_2	2 (20)	4 (5)	6	0
2	A_3	5	3 (0)	3 (35)	0
0	A_4	0	0	0 (10)	0
		0	0	0	

عدد طرق النقل المستخدمة في هذا الحل يساوي **6** وهو نفس العدد المطلوب وفق المقياس n+m-1، فالحل الابتدائي **مقبول**، مع الإشارة إلى أن الكمية المنقولة في إحدى طرق النقل (A_3 , B_2) تساوي **صفر** وذلك لتفادي الوقوع في حالة عدم انتظام (حالة عدد طرق النقل أصغر من العدد المطلوب).

تكلفة شبكة النقل لهذا الحل الابتدائي تساوي 195 و.ن. يمكن البحث عن الحل الأمثل باستعمال أي من الطرق المشار إليها سابقا.

مثال2: حل مسألة النقل التالية وفق المعطيات الواردة في الجدول أدناه:

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	5	6	7	50
A_2	4	9	3	2	150
A_3	6	5	2	3	60
A_4	8	1	2	4	40
	50	40	160	80	300 / 330

نلاحظ أن مجموع ما هو متاح لدى مصادر التموين يساوي **330** وهو أكبر من مجموع احتياجات المستعملين التي تساوي **300**. من أجل حل هذه المسألة يجب إضافة مستعمل خامس (وهمي) بكمية مطلوبة تساوي **330 – 300 = 30** وحدة،

وذلك بإضافة صف إضافي إلى الجدول السابق بتكاليف أحادية صفرية. ويصبح الجدول التالي يمثل مسألة نقل متوازنة حيث العرض = الطلب.

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	5	6	7	50
A_2	4	9	3	2	150
A_3	6	5	2	3	60
A_4	8	1	2	4	40
A_5	0	0	0	0	30
	50	40	160	80	330 / 330

الحل الابتدائي: نستخدم طريقة الفروقات الكبرى في إيجاده.

		4	1	2	2	
		B_1	B_2	B_3	B_4	
1	A_1	4 / 20	5	6 / 30	7	0
1	A_2	4	9	3 / 70	2 / 80	0
1	A_3	6	5	2 / 60	3	0
1	A_4	8	1 / 40	2 / 0	4	0
0	A_5	0 / 30	0	0	0	0
		0	0	0	0	330 / 330

عدد طرق النقل المستعملة في هذا الحل الابتدائي تساوي 8 وهي تكافيء العدد المطلوب حسب المقياس n+m-1، فهذا الحل إذن مقبول، وتكلفته تساوي: 790 و.ن.

البحث عن الحل الأمثل باستعمال طريقة التحويل:

نستخدم الآن طريقة التحويل لإيجاد الحل الأمثل.

المحاولة I:

جدول $-C_{ij}-$

4	5	6	7
4	9	3	2
6	5	2	3
8	1	2	4
0	0	0	0

جدول الحل الابتدائي.

20		30	
		70	80
		60	
	40	0	
30			

جدول - I -

					E_i
	4	–	6	–	4
	–	–	3	2	1
	–	–	2	–	0
	–	1	2	–	0
	0	–	–	–	0
F_j	0	1	2	1	

جدول - III -

–	5	–	7
4	9	–	–
6	5	–	3
8	–	–	4
–	0	0	0

جدول - IV -

−	0	−	2
3	7	−	−
6	4	−	2
8	−	−	3
−	−1	2−	1−

جدول - II -

					E_i
	−	5	−	5	4
	1	2	−	−	1
	0	1	−	1	0
	0	−	−	1	0
	−	1	2	1	0
F_j	0	1	2	1	

نلاحظ أن الجدول الرابع يحتوي على عدة قيم سالبة وبالتالي فالحل الابتدائي لا يعتبر حلا أمثلا.

نستمر إذن في البحث عن الحل الأمثل وذلك بإدخال طريق النقل (a_5, b_3) ونحول إليه كمية منقولة ما من إحدى طرق النقل المستخدمة حاليا. باستخدام شبكة النقل المحصل عليها في الحل الابتدائي نكون دورة تحويل لملء طريق النقل (a_5, b_3) كالتالي:

20 +		− 30	
		70	80
		60	
	40	0	
30 −		+	

هذه المحاولة تتضمن حالة خاصة من حالات حل مسألة النقل وتتمثل في أن الكميات الموجودة في الخانات ذات الإشارة السالبة هي كلها متساوية، وبالتالي فإن نقل إحدى هذين الكميتين إلى طريق النقل (A_5,B_3) يترتب عليه انخفاض عدد طرق النقل المستخدمة بواحد، ويصبح **سبعة** فقط عوض ثمانية المطلوبة. لذلك لا

نستطيع والحالة هذه مواصلة الحل إلا بإعادة إرجاع عدد طرق النقل المستعملة في شبكة النقل إلى **ثمانية**. هنا نتفحص الخانتين اللتين أصبحتا فارغتين بفعل الحالة المشار إليها، وهما الخانة (A_5,b_1) و(A_1,B_3) فنحتفظ بطريق النقل (A_5,B_1) لأنه ذو تكلفة النقل الأصغر (**0**) ونضع فيه كمية منقولة تساوي **صفر** ونتخلى عن طريق النقل (A_1,B_3) لأنه الأغلى، فنحول الكمية التي كانت منقولة فيه إلى (A_5,B_3). نحصل بعد ذلك على شبكة نقل جديدة كالتالي:

50			
		70	**80**
		60	
	40	**0**	
0		**30**	

تكلفة النقل الجديدة حسب هذه الشبكة تساوي: 790 – 2 × 30 = **730** و.ن.

المحاولة II:

جدول –C_{ij}–

4	**5**	**6**	**7**
4	**9**	**3**	**2**
6	**5**	**2**	**3**
8	**1**	**2**	**4**
0	**0**	**0**	**0**

شبكة النقل بعد المحاولة الأولى.

50			
		70	**80**
		60	
	40	**0**	
0		**30**	

					E_i
	4	–	–	–	4
	–	–	3	2	3
	–	–	2	–	2
	–	1	2	–	2
	0	–	0	–	0
F_j	0	–1	0	–1	

- I - جدول

–	5	6	7
4	9	–	–
6	5	–	3
8	–	–	4
–	0	–	0

- III - جدول

					E_i
	–	3	4	3	4
	3	2	–	–	3
	2	1	–	1	2
	2	–	–	1	2
	–	–1	2	–1	0
F_j	0	–1	0	–1	

- II - جدول

–	2	2	4
1	7	–	–
4	4	–	2
6	–	–	3
–	1	–	1

- IV - جدول

نلاحظ أن الجدول الرابع لا يحتوي على القيم السالبة وبالتالي فالحل المحصل عليه بعد المحاولة الأولى يعتبر حلا أمثلا، وقيمته 730 و.ن.

مثال على الحالة الثانية: الجدول التالي يعطينا الكميات المتوفرة لدى ثلاث ممونين، والكميات المطلوبة من طرف ثلاث مستهلكين لمنتج معين وكذلك تكاليف النقل

للوحدة (C_{ij}). والمطلوب إيجاد أرخص شبكة نقل يمكن بواسطتها تلبية كل طلب المستهلكين.

	B_1	B_2	B_3	
A_1	2	5	4	22
A_2	7	3	3	35
A_3	4	8	6	28
	20	15	30	85 / 65

هنا في هذا المثال مجموع الكمية المطلوبة تساوي (85) وحدة وهي أكبر من مجموع الكمية المعروضة (65) وحدة.من أجل حل هذه المسألة يلزم إضافة ممون رابع وهمي بكمية معروضة تساوي الفرق بين العرض الكلي والطلب الكلي :

(85 -65 = 20) وحدة وبتكاليف أحادية صفرية. أي: ($C_{14} = C_{24} = C_{34} = 0$).

جدول النقل للمثال السابق يصبح كالتالي:

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	5	4	0	22
A_2	7	3	3	0	35
A_3	4	8	6	0	28
	20	15	30	20	85 / 85

الآن أصبح مجموع الطلب = مجموع العرض وبالإمكان حل هذه المسألة بأي من الطرق السابقة.

الحل الابتدائي: إيجاد الحل الابتدائي باستخدام طريقة الفروقات الكبرى.

		2	2	1	0	
		B_1	B_2	B_3	B_4	
2	A_1	2 / 20	5	4 / 2	0	0
3	A_2	7	3 / 15	3 / 20	0	0
4	A_3	4	8	6 / 8	0 / 20	0
		0	0	0	0	

عدد طرق النقل المستخدمة في هذا الحل يساوي 6 وهو نفس العدد المطلوب وفق المقياس n+m-1، فالحل الابتدائي **مقبول**، تكلفة شبكة النقل لهذا الحل الابتدائي تساوي **201** و.ن.

يمكن البحث عن الحل الأمثل باستعمال أي من الطرق المشار إليها سابقا.

القسم الثالث

بعض الحالات الخاصة لمسألة النقل

من أجل إيجاد حل لبعض الحالات الخاصة لمسائل النقل، يجب الأخذ بعين الاعتبار بعض القيود الإضافية المفروضة فيها، التي تعكس معطيات وشروطا لم تكن متضمنة في حالات مسائل النقل العادية التي تم معالجتها سابقا. نشير في هذا المقام إلى بعض الحالات الممكنة لمثل هذه المسائل.

1-يشار في بعض مسائل النقل إلى أن عملية نقل المنتج المراد نقله من مصدر معين ($\mathbf{B_j}$) إلى مستعمل ($\mathbf{A_i}$) غير ممكنة التحقيق لأسباب مختلفة قد تكون تقنية أو غيرها (بمعنى عدم إمكانية استعمال هدا الطريق). من أجل إيجاد حل أمثل لمثل هذا النوع من مسائل النقل، نفترض أن تكلفة النقل الوحدوية ($\mathbf{C_{ij}}$) من المصدر ($\mathbf{B_j}$) إلى المستعمل ($\mathbf{A_i}$) المعنيين هي قيمة مرتفعة جدا تقترب من مالا نهاية، ونرمز لها الرمز (M و.ن.). بعد ذلك يمكن حل هذه المسألة باستعمال أي من طرق الحل التي تم استعمالها سابقا.

إن الافتراض السابق يسمح بالحصول على حل أمثل لمسألة النقل يستثني فيه إمكانية استعمال طريق النقل المشار إليه أعلاه، وهذا المدخل في حل مسألة النقل يعني في مضمونه توقيف أو منع طريق النقل غير ممكن الاستعمال.

2-تتضمن بعض مسائل النقل أحيانا شرطا إضافيا ينص على ضرورة الالتزام بنقل كمية معينة ما محددة من مصدر معين ($\mathbf{B_j}$) إلى مستعمل ($\mathbf{A_i}$)، كأن يفترض مثلا على أن الكمية الواجب نقلها من عند المصدر ($\mathbf{B_j}$) إلى المستعمل ($\mathbf{A_i}$) هي محددة ومعطاة مسبقا ومقدارها مثلا ($\mathbf{d_{ij}}$ **وحدة**). في مثل هذه الحالة نضع في الخلية التي تجمع بين ($\mathbf{B_j}$) و ($\mathbf{A_i}$) في جدول الكميات المنقولة نضع الكمية ($\mathbf{d_{ij}}$ **وحدة**)،

ومن أجل إيجاد حل أمثل لهذه المسألة يتضمن بالضرورة نقل كمية بين (B_j) و (A_i) مساوية تماما لـ(d_{ij}) ، نفترض أن تكلفة النقل الوحدوية (C_{ij}) بين الطرفين المذكورين هي قيمة كبيرة جدا مقدارها (M و.ن.). إن طرح مسألة النقل الجديدة بالافتراضات المشار إليها سوف يضمن لنا الحصول على حل أمثل للمسألة الأصلية يأخذ بعين الاعتبار القيد المفروض فيها.

3-هناك حالة أخرى يشار فيها إلى أن الكمية المنقولة من عند مصدر معين (B_j) إلى مستعمل ما (A_i) لا يجب أن تقل عن كمية معينة ما معطاة (d_{ij})، أي أن: $X_{ij} \geq (d_{ij})$. من أجل إيجاد حل أمثل لمثل هذه المسائل ننطلق من افتراض أن الكمية المتوفرة من المنتج عند المصدر (B_j) والكمية المطلوبة من طرف المستعمل (A_i) هي أقل من الكمية الفعلية المعطاة بمقدار (d_{ij}). باحترام هذا الشرط نجد حلا أمثلا لمسألة النقل الجديدة، الذي على قاعدته يحدد الحل الأمثل للمسألة الأولى.

4-بعض مسائل النقل يطرح فيها شرط آخر يتضمن ضرورة الأخذ بعين الاعتبار أن تكون الكمية المنقولة من المنتج (B_j) إلى المستعمل (A_i) لا تفوق مقدارا معينا (d_{ij}) مثلا، أي: $X_{ij} \leq (d_{ij})$.

سوف نتعرض في ما يلي لحل أمثلة لبعض من هذه الحالات.

مثال 1

تعاقدت إحدى مؤسسات إنتاج الأثاث المنزلي المصنوع من البلاستيك مع إحدى مؤسسات الأسواق الكبرى لتجارة الجملة على أن تبيع الوحدات الإنتاجية (B_1)، (B_2)، (B_3)، التابعة لمؤسسة الإنتاج إلى محلات البيع بالجملة (A_1)، (A_2)،

(A_3)، (A_4)، التابعة لمؤسسة الأسواق أنواعا معينة من الكراسي. الجدول التالي يتضمن الكميات المطلوبة من طرف محلات البيع والمتوفرة عند وحدات الإنتاج، وكذلك تكاليف النقل الوحدوية بينهما.

	B_1	B_2	B_3	
A_1	1,1	0,8	1,6	8800
A_2	2,6	2,4	3,4	5800
A_3	1,9	2	2,8	2900
A_4	2,2	2,1	1,7	2100
	7250	10150	4350	19600 / 21750

اتضح أن الكراسي المنتجة في (B_3) لا تناسب خصائص الطلبية المقدمة من طرف محل البيع (A_1) وبالتالي فهو لا يستطيع استلامها، وأن تلك المنتجة من طرف (B_2) لا تناسب ما طلبه محل البيع (A_2) فامتنع عن استلامها هو أيضا. المطلوب إيجاد شبكة النقل الأرخص التي بموجبها يتم نقل الكميات المطلوبة من الكراسي من وحدات الإنتاج إلى المحلات التجارية مع الأخذ بعين الاعتبار الشروط المشار إليها أعلاه.

الحل

قبل الشروع في حل هذه المسألة، نحاول تحوير معطياتها حسب الشروط الإضافية المنصوص عليها فيها، بحيث أن تكلفتا النقل الوحدويتين (C_{13}) و (C_{22}) تساويان قيمة مقدارها (M و.ن.).

	B_1	B_2	B_3	
A_1	1,1	0,8	M	8800
A_2	2,6	M	3,4	5800
A_3	1,9	2	2,8	2900
A_4	2,2	2,1	1,7	2100
	7250	10150	4350	19600 / 21750

أ – الحل الابتدائي

من أجل إيجاد الحل الابتدائي نستعمل طريقة الفروقات الكبرى

		Δ=1,1	Δ=0,8	Δ=1,7	
		B_1	B_2	B_3	
Δ=0,3	A_1	1,1 7250	0,8 1550	M	8800 0
Δ=0,8	A_2	2,6	M 3600	3,4 2200	5800 0
Δ=0,1	A_3	1,9	2 2900	2,8	2900 0
Δ=0,4	A_4	2,2	2,1 2100	1,7	2100 0
Δ=0	A_5	0	0	0 2150	2150 0
		7250 0	10150 0	4350 0	

عدد طرق النقل المستخدمة في الحل الابتدائي تساوي 07، وهي تساوي العدد المطلوب حسب المقياس (n+m+1)، فهذا الحل إذن مقبول. التكلفة الكلية للنقل حسب هذا الحل تساوي: 26905 + 3600 m و.ن.

ب – الحل الأمثل

من أجل إيجاد الحل الأمثل نستعمل طريقة التحويل كالتالي:

المحاولة الأولى

				E_i
	1,1	0,8	---	1,1
	---	M	3,4	M +0,3
	---	2	---	2,3
	---	2,1	---	2,4
	---	---	0	M −3,1
F_J	0	− 0,3	3,1 − m	جدول 1

				E_i
	---	---	−m +4,2	1,1
	M +0,3	---	---	M +0,3
	2,3	---	−m +5,4	2,3
	2,4	---	−m +5,5	2,4
	M −3,1	M − 3,4	---	M −3,1
F_J	0	− 0,3	3,1 − m	جدول 2

---	---	2m – 4,2
–M +2,3	---	---
–0,4	---	+m – 2,6
–0,2	---	+m – 3,8
–M +3,1	–M +3,4	---
		جدول 4

---	---	m
2,6	---	---
1,9	---	2,8
2,2	---	1,7
0	0	---
		جدول 3

–7250	1550+	
+	– 3600	2200
	2900	
	2100	
		2150

3650	5150	
3600	---	2200
	2900	
	2100	
		2150

تكلفة النقل الكلية المحصل عليها بعد المحاولة الأولى تساوي:

26905 + 3600m + 3600 .(2,3 + m–) = 35185 و.ن.

المحاولة الثانية

				E_i
	1,1	0,8	---	1,1
	2,6	2	3,4	2,6
	---	2,1	---	2,3
	---	2,1	---	2,4
	---	---	0	−0,8
F_J	0	−0,3	0,8	جدول 1

				E_i
	---	---	−1,9	1,1
	2,3	2,3	---	2,6
	2,4	---	3,1	2,3
	2,4	---	3,2	2,4
	−0,8	−1,1	---	−0,8
F_J	0	−0,3	0,8	جدول 2

---	---	m
---	m	---
1,9	---	2,8
2,2	---	1,7
0	0	---
		جدول 3

---	---	m −1,9
---	M −2,3	---
−0,4	---	−0,3
−0,2	---	−1,5
0,8	1,1	---
		جدول 4

1550	7250	
5700		100
	2900	
		2100
		2150

3650−	+5150	
3600 +		2200 −
	2900	
	− 2100	+
		2150

تصبح تكلفة النقل الكلية المحصل عليها بعد المحاولة الثانية تساوي:

35185 − 1,5.(2100) = 32035 و.ن.

المحاولة الثالثة

F_J				E_i
	1,1	0,8	---	1,1
	2,6	---	3,4	2,6
	---	2	---	2,3
	---	---	1,7	0,9
	---	---	0	−0,8
F_J	0	−0,3	0,8	جدول 1

F_J				E_i
	---	---	1,9	1,1
	---	2,3	---	2,6
	2,3	---	3,1	2,3
	0,9	0,6	---	0,9
	−0,8	−1,1	---	−0,8
F_J	0	−0,3	0,8	جدول 2

---	---	m
---	m	---
1,9	---	2,8
2,2	2,1	---
0	0	---
		جدول 3

---	---	m − 1,9
---	M −2,3	---
−0,4	---	−0,3
1,3	0,5	---
0,8	1,1	---
		جدول 4

	8800	
5700		100
1550	1350	
		2100
		2150

1550 −	7250 +	
5700		100
+	− 2900	
		2100
		2150

بعد إجراء المحاولة الثالثة تصبح تكلفة النقل الكلية المحصل عليها تساوي:

32035 − 0,4.(1550) = 31415 و.ن.

المحاولة الرابعة

E_i				
0,7	---	0,8	---	
2,6	3,4	---	2,6	
1,9	---	2	1,9	
0,9	1,7	---	---	
–0,8	0	---	---	
جدول 1	0,8	0,1	0	F_J

E_i				
0,7	1,5	---	0,7	
2,6	---	2,7	---	
1,9	2,7	---	---	
0,9	---	1	0,9	
–0,8	---	–0,7	–0,8	
جدول 2	0,8	0,1	0	F_J

m	---	1,1
---	m	---
2,8	---	---
---	2,1	2,2
---	0	0
جدول 3		

m – 1,5	---	0,4
---	M –2,7	---
0,1	---	---
---	1,1	1,1
---	0,7	0,8
جدول 4		

نلاحظ أن الجدول الرابع للمحاولة الرابعة أصبح لا يحتوي على القيم السالبة (على أساس أن M هي قيمة موجبة كبيرة جدا)، وبالتالي فإن الحل المحصل عليه في المحاولة السابقة (المحاولة الثالثة) هو حل أمثل. بموجب هذا الحل تكون تكلفة النقل الكلية الدنيا المحصل عليها تساوي: **32035 – 0,4.(1550) = 31415 و.ن.**

مثال 2:

الجدول أدناه يتضمن معطيات خاصة بمسألة نقل معينة، حيث نجد الكميات المطلوبة (**a_i**) في آخر عمود على اليمين والكميات المعروضة (**b_j**) في الصف السفلي.

الشروط الاضافية في هذه المسألة هي أن الكمية المنقولة من عند (B_1) إلى (A_2) هي محددة بمقدار a_{21} تساوي **60** وحدة، أما طريقا النقل (A_1B_2) و(A_2B_5) فهما مغلقان، أي أنهما غير متاحان للاستعمال. المطلوب إيجاد شبكة النقل الأرخص لنقل المنتج بين الأطراف المختلفة يأخذ في الحسبان الشروط السابقة.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	2	3	1	4	180
A_2	6	3	4	5	2	220
A_3	8	2	1	9	3	100
	120	80	160	90	50	500 / 500

الحل

حتى يمكن حل المسألة المعطاة يجب إعادة تحوير جدول المعطيات بحيث يتضمن معطيات الشروط الإضافية المنصوص عليها في المسألة، على أساس أن تكلفتا النقل الوحدويتين C_{12} و C_{25} يصبحان مساويتين ل(**m**و.ن.). أما في طريق النقل (A_2B_1) فنضع فيه الكمية المفروضة 60 وحدة، بعد ذلك نبحث عن الحل الأمثل للمسألة آخذين بعين الاعتبار الشروط الإضافية.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	m	3	1	4	180
A_2	m / 60	3	4	5	2	160
A_3	8	2	1	9	m	100
	60	80	160	90	50	500 / 500

أ-البحث عن الحل الابتدائي

نعتبر أن طريق النقل (A_2B_1)، بعدما تلقى كمية مساوية ل 60 وحدة، أصبح غير مستعمل ولكن تكلفته الوحدوية C_{21} تساوي (**m**و.ن.). نبحث عن الحل الابتدائي باستعمال طريقة الفروقات الكبرى.

		Δ=7	Δ=1	Δ=2	Δ=4	Δ=1	
		B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**	
Δ=0,3	**A_1**	1 / 60	m	3 / 30	1 / 90	4	180 / 0
Δ=0,8	**A_2**	m	3 / 80	4 / 30	5	M / 50	160 / 0
Δ=0,1	**A_3**	8	2	1 / 100	9	3	100 / 0
		60 / 0	80 / 0	160 / 0	90 / 0	50 / 0	

عدد طرق النقل المستخدمة في الحل الابتدائي تساوي **07**، وهي تساوي العدد المطلوب حسب المقياس (n+m+1)، فهذا الحل إذن مقبول. التكلفة الكلية للنقل حسب هذا الحل تساوي 1060 + 50 m و.ن.

ب – الحل الأمثل

من أجل إيجاد الحل الأمثل نستعمل طريقة التحويل كما يلي:

المحاولة الأولى

						E_i
	--	2	–	–	m −1	1
	2	–	–	2	--	2
	−1	0	–	−1	m −3	1–
F_J	0	1	2	0	M −2	جدول 2

						E_i
	1	–	3	1	--	1
	–	3	4	–	m	2
	–	–	1	–	--	1–
F_J	0	1	2	0	M −2	جدول 1

–	M −2	–	–	5 −m
M −2	–	–	3	––
9	2	–	10	6 −m

جدول 4

––	m	–	–	4
m	–	–	5	––
8	2	–	9	3

جدول 3

60		– 30	90	+
60	80	+ 30		– 50
		100		

60			90	30
60	80	60		20
		100		

تكلفة النقل الكلية المحصل عليها بعد المحاولة الأولى تساوي:

$1060 + 50m + 30 .(-m + 5) = 1210 +$ 20 m و.ن.، مع اعتبار أن طريق النقل (**A_2B_1**) غير مستعمل.

المحاولة الثانية

						E_i
	–	7 – m	8– m	–	–	1
	m – 3	–	–	m– 3	–	M –3
	m – 6	0	–	m – 6	m –3	m– 6
F_J	0	6 – m	7– m	0	3	جدول 2

						E_i
	1	–	–	1	4	1
	–	3	4	–	m	M –3
	–	–	1	–	–	m– 6
F_J	0	6– m	7– m	0	3	جدول 1

–	7+ 2m	m –5	–	––
3	–	–	8–m	––
14– m	2	–	15– m	6 –m

جدول 4

––	m	3	–	––
m	–	–	5	––
8	2	–	9	3

جدول 3

60			90	30
60	80	+ 60		– 20
		– 100		+

60			90	30
60	80	80		
		80		20

كلفة النقل الكلية المحصل عليها بعد المحاولة الأولى تساوي:

1330 = (6– m). 20 + 20m + 1210 و.ن.

المحاولة الثالثة

					E_i
	–	1	2	–	–	1
	3	–	–	3	6	3
	0	0	–	0	–	0
F_J	0	0	1	0	3	جدول 2

						E_i
	1	–	–	1	4	1
	–	3	4	–	–	3
	–	–	1	–	3	0
F_J	0	0	1	0	3	جدول 1

–	M –1	1	–	––
m– 3	–	–	2	M –6
8	2	–	9	

جدول 4

––	m	3	–	––
m	–	–	5	m
8	2	–	9	–

جدول 3

كل قيم الجدول الرابع موجبة، مما يدل على أنه تم التوصل إلى حل أمثل، قيمة تكلفة النقل الكلية الدنيا المحصل عليها تساوي: **1330** و.ن.

تمارين

أوجد طرق النقل الأقل تكلفة لشبكات النقل المحددة بالمعطيات التالية، حيث الأرقام داخل الجدول تمثل تكاليف النقل الأحادية (C_{ij})، على يمين الجدول الكميات المطلوبة من طرف المستعملين، وفي أسفل الجدول الكميات المتاحة في مصادر التموين.

4	2	4	45
3	2	1	35
5	3	3	55
3	7	5	65
90	60	40	
Rép : 505			

15	1	22	19	1	20
21	18	11	4	3	20
26	29	23	26	24	20
21	10	3	19	27	20
19	19	19	19	4	
Rép : 684					

1	1	0.9	5
0.8	1.4	1	20
0.8	1	1.3	20
10	15	20	
Rép : 42.5			

16	30	17	10	16	4
30	27	26	9	23	6
13	4	22	3	1	10
3	1	5	4	24	10
7	7	7	7	2	
Rép : 191					

2	7	3	4	6
2	5	4	3	9
7	9	6	5	15
7	5	8	10	

Rép : **128**

5	2	3	15
2	4	6	25
5	3	3	35
20	20	45	

Rép : **195**

5	15	3	6	10	9
23	8	13	27	12	11
30	1	5	24	25	14
8	26	7	28	9	16
8	9	13	8	12	

Rép : **339**

9	3	7	2
5	7	8	2
10	2	5	6
3	3	4	

Rép : **46**

2	5	4	22
7	3	3	35
4	8	6	28
20	15	30	

Rép : **201**

3	3	4	
6	4	3	8
9	5	7	5
7	2	2	7
15	9	6	

Rép : **128**

2	5	4	800
3	5	6	500
11	7	8	600
9	4	3	1300
1600	900	700	

Rép : **13000**

7	5	4	3	250
3	4	5	2	150
5	6	6	5	270
170	130	190	200	

Rép : **2710**

2	4	6	7	150
4	4	5	2	70
5	9	3	2	80
55	45	125	55	

Rép : **895**

14	28	21	28	27
10	17	15	24	20
14	30	25	21	43
33	13	27	17	

Rép : **1565**

30	2	5	6	15	16
5	29	9	5	7	15
16	24	14	6	26	14
13	28	4	25	8	15
6	6	13	20	15	
Rép : 329					

7	8	6	40
6	5	10	60
4	3	9	50
30	40	60	
Rép : 720			

450	500	525	130
375	400	425	110
675	750	700	180
150	70	120	
Rép : 172500			

5	6	7	20
6	4	5	5
3	7	3	10
5	3	1	10
9	5	8	5
15	15	20	
Rép : 150			

9	12	9	6	5
7	3	7	7	6
6	6	9	8	11
4	4	7	7	
Rép :141				

6	7	5	10
7	6	11	40
3	2	8	30
20	30	50	
Rép : 470			

1	3	2	50
4	5	7	100
6	2	4	130
70	100	110	
Rép : 910			

29	53	39	29	22	33
15	33	16	3	3	18
16	27	16	3	5	32
35	50	39	20	23	17
20	20	20	20	20	
Rép : 2096					

7	5	4	6	250
3	4	5	2	150
8	6	9	5	270
170	150	190	200	
Rép : 2390				

8	27	17	14	9	120
9	5	10	2	13	150
7	21	18	14	11	160
23	9	11	18	25	70
150	40	30	50	80	
Rép : 2370					

1	16	4	3	50
6	10	1	2	100
8	8	9	7	150
12	6	11	7	200
16	15	13	15	250
100	400	100	100	
Rép : 5450				

1	3	5	50
3	3	2	30
4	1	2	20
30	20	50	
Rép :			

2	3	2	4	1	300
3	4	1	2	4	250
2	3	4	1	2	150
3	4	2	3	2	200
150	100	75	250	200	
Rép :2950					

2	3	6	8	7	40
5	7	4	2	5	35
7	1	3	1	10	45
20	26	16	38	20	
Rép : 307					

9	17	29	28	8	22
13	21	27	16	29	13
20	30	24	7	26	17
11	19	30	6	2	18
7	7	7	7	42	
Rép : 726					

5	7	9	190
7	4	10	130
4	3	6	80
9	4	8	100
5	7	7	130
200	205	225	
Rép : 3340			

1.1	0.8	1.6	880
2.6	2.4	3.4	580
1.9	2	2.8	290
2.2	2.1	1.7	210
725	1015	435	
Rép : 130990			

7	8	1	2	160
4	5	9	8	140
9	2	3	6	170
120	50	190	110	
Rép : 1330				

الفصل الثاني
مسألة التخصيص

تعتبر مسألة التخصيص واحدة من أهم المشكلات الاقتصادية التي تتطلب في كثير من جوانبها اللجوء إلى تقنيات بحوث العمليات لحلها. المقصود بالتخصيص هو توجيه أو توزيع موارد، نشاطات أو مهام معينة على جهات أو أطراف معينة لتنفيذها، والهدف من ذلك هو استعمال تلك الموارد أو القيام بالنشاطات بأفضل طريقة ممكنة من أجل الحصول على نتائج مثلى.

من المجالات التي نلجأ فيها إلى أسلوب التخصيص نذكر:

- تخصيص وسائل نقل مختلفة، ذات تكلفة نقل مختلفة، لنقل منتجات أو أفراد من أمكنة مختلفة إلى أماكن أخرى.
- تخصيص نشاطات مختلفة على عمال، موظفين، طلبة، باحثين وغيرهم.
- تخصيص وظائف أو مهام مختلفة على منفذين تختلف طبيعتهم حسب اختلاف تخصصهم أو طبيعة العمل المطلوب منهم.

تهدف عملية التخصيص إلى تحقيق أهداف معينة، وتسعى بحوث العمليات إلى تحقيق تلك الأهداف بطريقة مثلى (تعظيم أو تدنية دالة الهدف).

إن استعمال التقنيات الكمية في حل مسائل التخصيص يتطلب أن تتوفر في معطيات هذه المسائل بعض الشروط، ومن أهمها:

كل مهمة أو نشاط يخصص لمنفذ واحد فقط وبالعكس كل منفذ لا يقوم بتنفيذ إلا نشاط واحد فقط. إن هذا يترتب عليه تساوي عدد المنفذين مع عدد المهام أو الأعمال المطلوب تنفيذها.

المبحث الأول

حل مسألة التخصيص في حالة تدنية دالة الهدف.

سنحاول من خلال المثال التالي توضيح الإشكالية الأساسية لمسألة التخصيص وكذلك عرض أسلوب حلها.

تمتلك إحدى الشركات أربعة وحدات إنتاجية وأربعة مستودعات وتريد تهيئتها كمخازن متخصصة لمنتجات تلك الوحدات الإنتاجية، على أساس تخصيص مخزن واحد فقط لكل وحدة إنتاجية. يؤثر تخصيص المخازن على الوحدات الإنتاجية على قيمة التكاليف السنوية للنقل للمؤسسة الأم، من هذا المنطلق تهدف المؤسسة الأم إلى الوصول إلى ذلك التخصيص الذي يحقق لها أقل تكلفة نقل سنوية ممكنة.

بناءا على وسائل النقل المتاحة للمؤسسة والمسافات الموجودة بين مختلف الوحدات الإنتاجية والمخازن أعدت مصالح هذه المؤسسة المعطيات التالية الخاصة بتكاليف النقل المتوقعة بين مختلف هياكلها المشار إليها أعلاه كالتالي:

	مخزن1	مخزن2	مخزن3	مخزن4
مصنع 1	10	33	41	20
مصنع 2	24	17	50	60
مصنع 3	39	32	62	29
مصنع 4	22	27	39	37

الفرع الأول: طريقة السرد الكامل

La méthode d'énumération complète

يمكن النظر في البداية إلى هذه المشكلة على أساس أنها مسألة احتمالات أو توافيق (des permutations) لمختلف إمكانيات النقل بين المصانع والمخازن، ثم نختبر أو نتفحص (نسرد) كل هذه التوافيق ونختار أرخصها، أي تلك التي لها أقل تكلفة نقل إجمالية ممكنة.

حسب هذا التصور، فإن عدد الإمكانيات المختلفة للتخصيص في مثالنا هي: $n! = 4! = \mathbf{24}$ إمكانية، ويتعين علينا اختبار كل هذه الإمكانيات لاختيار أرخصها كالآتي:

	مخزن1	مخزن2	مخزن3	مخزن4
الإمكانية الأولى للتخصيص	مصنع1	مصنع2	مصنع3	مصنع4
الإمكانية الثانية للتخصيص	مصنع2	مصنع1	مصنع3	مصنع4
الإمكانية الثالثة للتخصيص	مصنع1	مصنع2	مصنع4	مصنع3
الإمكانية الرابعة للتخصيص	مصنع2	مصنع1	مصنع4	مصنع3
....	....	....	....	....
الإمكانية 24 للتخصيص	....	....	....	....

إن عدد الحلول الممكنة التي يتعين علينا اختبارها يزداد كلما ازداد عدد الأنشطة أو المهام المراد تخصيصها، وهذا يتطلب جهدا ووقتا متزايدين للوصول إلى الحل الأمثل.

الفرع الثاني: الطريقة الهنقارية في حل مسألة التخصيص.

تعتمد الطريقة الهنقارية على طريقة السرد الجزئي لمختلف إمكانيات التخصيص للمسألة المعطاة، وتقسم معالجة هذه المشكلة إلى حالتين: حالة تدنية دالة الهدف وحالة تعظيمها.

خطوات الحل في حالة التدنية هي كالتالي:

المرحلة الأولى:

1- تحديد أصغر قيمة في كل صف من صفوف جدول معطيات التخصيص وطرحها من نفسها ومن كل قيم ذلك الصف.

2- تحديد أصغر قيمة في كل عمود من أعمدة جدول التخصيص المحصل عليه وطرحها من نفسها ومن كل قيم ذلك العمود.

3- العمود أو الصف الذي يوجد فيه **صفر** أو أكثر نبقي على قيمه كما هي.

المرحلة الثانية:

1- تتمثل عملية التخصيص في وضع بعض الأصفار المحصل عليها في المرحلة السابقة داخل مربعات وشطب البعض الآخر.

2- نتفحص كل صف من صفوف الجدول السابق، إذا وجد فيه **صفر واحد فقط**، فنخصصه (أي نضعه داخل مربع)، ثم نشطب باقي أصفار العمود

الموجود فيه ذلك الصفر. (الصف الذي فيه أكثر من صفر لا تخصص أصفاره في المرحلة الأولى).

3- نتفحص كل عمود من أعمدة الجدول المحصل عليه، إذا وجد فيه **صفر واحد فقط غير مخصص أو غير مشطوب** فنخصصه، ثم نشطب جميع أصفار الصف الذي ينتمي إليه ذلك الصفر.

4- نعيد هذه العملية عدة مرات حتى تكون **كل** الأصفار في الجدول إما مخصصة أو مشطوبة: قبل المرور إلى المرحلة الثالثة من الحل يجب أن تكون كل الأصفار في الجدول إما مخصصة أو مشطوبة.

5- كقاعدة عامة نخصص دائما من الأعمدة والصفوف التي تحتوي على أقل الأصفار: فنبدأ عملية التخصيص أولا من الصفوف والأعمدة التي تحتوي على صفر واحد فقط، ثم ننتقل إلى الأعمدة والصفوف ذات الصفرين، فإذا ما انتهت هذه الأخيرة ننتقل إلى تلك التي تحتوي على ثلاثة أصفار وهكذا حتى تنتهي عملية التخصيص.

6- تتطلب عملية التخصيص احترام إجراءات معينة في مراحل الحل: إما إجراء كل مراحل عملية التخصيص انطلاقا من يمين الجدول إلى يساره أو العكس، وإما كلها من أعلى إلى أسفل الجدول أو العكس.

7- في نهاية هذه المرحلة يمكن أن نصل إلى حل أمثل، ومن شروط الحصول على الحل الأمثل ما يلي:

– إذا كان الجدول المحصل عليه يحتوي على عدد من الخانات المخصصة (الخانات الصفرية التي هي بداخل المربعات) يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة.

– إذا كان كل عمود وكل صف لا يحتوي إلا على خانة مخصصة واحدة، فإذا كان أي عمود أو (و) صف أو أكثر يحتوي على أكثر من خانة مخصصة فإن هذا الحل يعتبر غير صحيح ويجب إعادته لأنه لا يحترم الشرط الأساسي لمنهج الطريقة الهنقارية في حل مسائل التخصيص وهو ضرورة تساوي عدد المهام المراد تخصيصها مع عدد المنفذين لهذه المهام.

في حالة ما إذا كان عدد الخانات المخصصة أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة نستمر في البحث عن الحل الأمثل وذلك بالانتقال إلى المرحلة الثالثة.

المرحلة الثالثة:

1- نعين (نضع علامة معينة مثلا ×) أمام أي صف لا يوجد فيه خانة (صفر) مخصصة.

2- نعين (نضع علامة ×) أمام أي عمود يحتوي على صفر مشطوب ينتمي إلى الصف السابق الذي تم تعينه.

3- نعين أي صف يحتوي على خانة (صفر) مخصصة تنتمي إلى العمود الأخير الذي تم تعيينه.

4- نضع علامة التعيين أمام أي عمود يحتوي على صفر مشطوب ينتمي إلى الصف الجديد الذي تم تعيينه.

5- نعين أي صف يحتوي على خانة (صفر) مخصصة تنتمي إلى العمود الجديد الذي تم تعيينه.

6- وهكذا نستمر في عملية التعيين حتى يصبح آخر صف تم تعيينه لا يحتوي على صفر مشطوب.

7- نشطب كل صف **غير معين** وبالعكس كل **عمود معين**.

المرحلة الرابعة:

1- نحدد أقل قيمة من بين القيم المتبقية في الجدول (القيم الموجودة في الصفوف والأعمدة غير المشطوبة).

2- نطرح هذه القيمة من نفسها ومن القيم الأخرى غير المشطوبة.

3- نضيف هذه القيمة إلى القيم التي تقع عند نقاط تقاطع أي خطين من خطوط الشطب المشار إليها أعلاه.

نعيد كتابة كل القيم في جدول جديد.

4- بعد ذلك نعيد تطبيق خطوات المرحلة الثانية(نجري محاولة ثانية للتخصيص)، فإذا لم نصل إلى حل أمثل نعيد تطبيق خطوات المرحلة الثالثة والرابعة وهكذا حتى نصل إلى حل أمثل.

نحاول الآن تطبيق خطوات الحل بهذه الطريقة على المثال الذي أخذناه سابقا.

المحاولة الأولى للحل:

نبحث على أصغر القيم في الصفوف وهي (10، 17، 29، 22)، نطرحها من نفسها ومن القيم الأخرى في الصفوف المنتمية إليها، ثم في الجدول الناتج بعد ذلك نبحث على أصغر القيم في الأعمدة ونطرحها من نفسها ومن القيم الأخرى في الأعمدة المنتمية إليها. نلاحظ أن كل الأعمدة تحتوي على أصفار فنترك قيمها كما هي ما عدا العمود الثالث وأصغر قيمة فيه هي (17) فنطرحها من نفسها ومن باقي قيم هذا العمود. نحصل على إثر ذلك على النتائج التالية:

10	31	23	0
43	33	0	7
0	33	3	10
15	17	5	0

10	14	23	0
43	16	0	7
0	16	3	10
15	0	5	0

نجري الآن محاولة أولى للتخصيص فنحصل على النتائج التالية:

الخطوة الأولى			
10	14	23	0
43	16	0	7
0	16	3	10
15	0	5	0

الخطوة الثانية			
10	14	23	0
43	16	0	7
0	16	3	10
15	0	5	0

الخطوة الثالثة			
10	14	23	**0**
43	16	**0**	7
0	16	3	10
15	0	5	~~0~~

الخطوة الرابعة			
10	14	23	**0**
43	16	**0**	7
0	16	3	10
15	**0**	5	~~0~~

بعد الانتهاء من عملية التخصيص نجري اختبار الأمثلية، بمعنى نختبر الحل المتحصل عليه بعد المحاولة الأولى هل هو يمثل حلا أمثلا أم لا.

نلاحظ أن عدد الخانات المخصصة يساوي فعلا عدد الصفوف أو الأعمدة (4)، وأن هذه الخانات موزعة توزيعا منتظما على الصفوف والأعمدة بحيث أن كل صف وكل عمود يحتويان على خانة مخصصة واحدة، وهذه هي علامة الوصول إلى حل أمثل.

تحليل الحل:

الخانة المخصصة الأولى تعني أن المخزن الأول يجب تخصيصه للمصنع الأول بتكلفة نقل دنيا تساوي **10** و.ن. الخانة المخصصة الثانية تعني أن المخزن الثاني يجب تخصيصه للمصنع الثاني بتكلفة نقل دنيا تساوي **17** و.ن.

أما الخانة المخصصة الثالثة فتعني أن المخزن الرابع يجب تخصيصه للمصنع الثالث بتكلفة نقل دنيا تساوي **29** و.ن. والخانة المخصصة الرابعة تعني أن المخزن الثالث يجب تخصيصه للمصنع الرابع بتكلفة نقل دنيا تساوي **17** و.ن.

وتكون مجموع تكلفة النقل الدنيا لتخصيص المخازن على المصانع تساوي **95** و.ن. نشير هنا أنه من بين **24** إمكانية للتخصيص المشار إليها سابقا فإن الإمكانية المتوصل إليها هي أرخصهم جميعا.

مثال2:

يعطي الجدول التالي بيانات متعلقة بتكاليف إنتاج أربع أنواع من المنتجات في أربع ورشات. المطلوب تخصيص هذه المنتجات على الورشات بحيث نحقق أقل تكاليف الإنتاج.

	الورشة1	الورشة2	الورشة3	الورشة4
المنتج1	12	5	10,5	5,5
المنتج2	7	11	5	7,5
المنتج3	7,5	8,5	10	9,5
المنتج4	5,5	9,5	7	6,5

بعد إجراء خطوات المرحلة الأولى نحصل على الجدول التالي:

7	0	5,5	0
2	6	0	2
0	1	2,5	1,5
0	4	1,5	0,5

نجري الآن محاولة أولى للتخصيص وذلك بدءا بالصفوف، نلاحظ أن الصف الأول يحتوي على صفرين فنتركه مؤقتا للمراحل اللاحقة، ننتقل بعده إلى الصف الثاني الذي يحتوي على صفر واحد فنخصصه ونشطب جميع أصفار العمود الذي ينتمي إليه هذا الصفر (لا يوجد فيه أصفار).

على إثر ذلك ننتقل إلى الصف الثالث الذي يوجد فيه صفر واحد فقط هو أيضا فنخصصه ونشطب الصفر الموجود في العمود الذي ينتمي إليه الصفر المخصص، وأخيرا ننتقل إلى الصف الرابع ونلاحظ أنه لا يحتوي على أصفار غير مخصصة أو غير مشطوبة.

ننتقل الآن إلى الأعمدة بدءا من اليمين، العمود الأول هو خال من الأصفار غير المخصصة أو غير المشطوبة، العمود الثاني يحتوي على صفر غير مخصص وغير

مشطوب فنخصصه ونشطب جميع أصفار الصف الذي ينتمي إليه هذا الصفر المخصص. العمود الثالث والرابع لا توجد فيهما أصفار غير مخصصة أو غير مشطوبة، الجدول الناتج عن هذه المحاولة للتخصيص هو كالتالي:

0 (مشطوب)	5,5	[0]	7
2	[0]	6	2
1,5	2,5	1	[0]
0,5	1,5	4	0 (مشطوب)

نتأكد من أن جميع الأصفار في الجدول كلها مشطوبة أو مخصصة ثم نجري اختبار الأمثلية، الذي يوضح أن عدد الخانات المخصصة يساوي ثلاثة فقط وهو أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة. فالحل المحصل عليه بعد المحاولة الأولى هو حل غير أمثل. ننتقل إلى تطبيق خطوات المرحلة الثالثة من الحل.

نعين الصف الرابع (نضع أمامه علامة ×) نظرا لأنه الصف الوحيد الذي لا توجد فيه خانة مخصصة، نرى بأن هذا الصف يحتوي على صفر مشطوب فنعين العمود الذي ينتمي إليه هذا الصفر المشطوب (العمود الأول)، نلاحظ بأن هذا العمود المعين (الأول) يحتوي على خانة مخصصة وهي تنتمي إلى الصف الثالث فنضع علامة التعيين أمام الصف الثالث. بعد ذلك نرى بأن الصف الثالث وهو الصف الأخير المعين لا يحتوي على صفر مشطوب، فنتوقف عن عملية التعيين ونختم هذه المرحلة من الحل بشطب الصفوف غير المعينة (الصف الأول والثاني) وشطب الأعمدة المعينة(العمود الأول) فقط.

			×	
0	5,5	0	7	
2	0	6	2	
1,5	2,5	1	0	×
0,5	1,5	4	0	×

نجري الآن خطوات المرحلة الرابعة، المتمثلة في تحديد أصغر قيمة من بين قيم الصفوف والأعمدة غير المشطوبة وهي القيمة (**0,5**)، فنطرحها من نفسها ومن كل القيم الستة غير المشطوبة فنحصل على القيم (**1،3,5،0,5،20،1**،) ونضيفها إلى القيم الموجودة عند نقاط تقاطع خطوط الشطب وهي القيم (**7،2**) فنحصل على القيم (**2,5،7,5**). أما القيم الأخرى الموجودة في الصفوف والأعمدة المشطوبة فتبقى كما هي. ننقل كل القيم إلى جدول جديد كالتالي:

0	5,5	0	7,5
2	0	6	2,5
1	2	0,5	0
0	1	3,5	0

نجري الآن **محاولة ثانية** للتخصيص وذلك بتأجيل الصف الأول مؤقتا لأنه يحتوي على صفرين وننتقل إلى الصف الثاني الذي يحتوي على صفر واحد فقط فنخصصه، ثم ننتقل إلى الصف الثالث فنخصص الصفر الوحيد الذي يوجد فيه ونشطب الصفر الموجود في العمود الأول. بعدها نخصص الصفر المتبقي في الصف الرابع (لأن الصفر الآخر مشطوب) ونشطب الصفر العلوي المنتمي إلى العمود الرابع.

بعد الانتهاء من الصفوف ننتقل إلى الأعمدة بالترتيب من اليمين إلى اليسار، نلاحظ بأن العمود الأول يحتوي على صفرين واحد مخصص والآخر مشطوب فهو إذن غير معني بعملية التخصيص، العمود الثاني يحتوي صفر واحد غير مخصص وغير مشطوب فنخصصه. العمود الثالث والرابع أصبحا غير معنيين بعملية التخصيص. على إثر هذه المحاولة الثنية للتخصيص نحصل على الجدول التالي:

0	5,5	0	7,5
2	0	6	2,5
1	2	0,5	0
0	1	3,5	0

هذا الجدول يمثل حلا أمثلا نظرا لأن عدد الخانات المخصصة يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة، وأن هذه الخانات غير مكررة في الصفوف والأعمدة. هذا الحل الأمثل يتطلب تخصيص المنتج الأول للورشة الثانية بتكلفة إنتاج دنيا قدرها 5 و.ن.، المنتج الثاني للورشة الثالثة بتكلفة إنتاج دنيا قدرها 5 و.ن. أيضا، المنتج الثالث للورشة الأولى بتكلفة إنتاج دنيا قدرها 7,5 و.ن. وأخيرا المنتج الرابع للورشة الرابعة بتكلفة إنتاج دنيا قدرها 6,5 و.ن. ويكون مجموع تكلفة الإنتاج الدنيا الناتجة عن هذا التخصيص تساوي **24** و.ن.

مثال3:

الجدول التالي يوضح عدد ساعات العمل اليومي التي يحتاجها خمسة عمال لأداء خمسة أنواع من النشاطات.

المطلوب: تخصيص النشاطات الخمسة على العمال بحيث يكون وقت العمل الكلي لأداء هذه النشاطات أقل ما يمكن.

5	4	3	2	1
3	5	2	4	1
4	5	1	2	3

4	5	3	2	1
5	3	4	1	2

بعد إنجاز خطوات المرحلة **الأولى والثانية** نحصل على النتائج الممثلة في الجدول التالي:

2	1	2	1	0
0	2	1	3	0
1	2	0	1	2
1	2	2	1	0
2	0	3	0	1

نلاحظ أن عدد الخانات المخصصة هو أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة وبالتالي نستمر في البحث عن الحل الأمثل. بعد إجراء خطوات المراحل الثالثة والرابعة نحصل على النتائج التالية:

1	0	1	0	0
0	2	1	3	1
1	2	0	1	3
0	1	1	0	0
2	0	3	0	2

				×	
2	1	2	1	0	×
0	2	1	3	0	
1	2	0	1	2	
1	2	2	1	0	×
2	0	3	0	1	

نجري **محاولة ثانية** للتخصيص، وهنا نلاحظ أنه بعد تخصيص الأصفار الموجودة في الصف الثاني والثالث تصبح كل الصفوف والأعمدة المتبقية في الجدول تحتوي على أكثر من صفر (الصف الأول: ثلاثة)، الصف الرابع والخامس (اثنين)، وكذلك العمود الأول والرابع (كل واحد بصفرين) والعمود الثاني بثلاث أصفار. في

مثل هذه الحالة يتعين الانتقال إلى الصفوف التي تحتوي على صفرين، فنبدأ بالصف الرابع – وهو أول صف يحتوي على صفرين- ونخصص أحد أصفاره على أن نبدأ من الصفر الموجود على اليمين وذلك احتراما للترتيب المستعمل منذ بداية الحل وهو التنقل من اليمين لليسار ونشطب في نفس الوقت الصفر الموجود في أعلى العمود الأول، ثم ننتقل إلى الصف الخامس ونخصص أحد صفريه وهو ذلك الموجود على اليمين ونشطب الصفرين الموجودين في وسط وأعلى العمود الثاني. بعد الانتهاء من الصفوف نرجع إلى الأعمدة فنحصل على النتيجة التالية:

1	**0**	1	0	0
0	2	1	3	1
1	2	**0**	1	3
0	1	1	0	**0**
2	0	3	**0**	2

نرى بأن الحل المتحصل عليه بعد المحاولة الثانية يشكل حلا أمثلا وذلك لأن عدد الخانات المخصصة يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة التي هي غير مكررة فيها. من هنا فإن أقل عدد من ساعات العمل التي يتطلبها أداء العمال لنشاطاتهم يساوي **10** ساعات ولا توجد إمكانية أخرى لتخفيضها أقل من ذلك.

مثال 4:

من أجل مجابهة المنافسة الشديدة في السوق العالمية، تقوم إحدى الشركات العالمية لإنتاج السيارات بدراسة إمكانية توزيع (توطين) فروعها الإنتاجية الخمسة المتخصصة في إنتاج لواحق (أجزاء) أنواع معينة من السيارات على خمس دول نامية.

تهدف هذه الشركة من خلال ذلك إلى تخفيض تكاليف إنتاجها وذلك بالاستفادة من التحفيزات الاستثمارية الكبيرة التي توفرها تلك الدول (مستوى الأجور، الامتيازات الضريبية، الجمركية، شروط تحويل رؤوس الأموال،...وغيرها).

الجدول التالي يعطي التكاليف المتوقعة لإنتاج اللواحق المختلفة المنتجة من طرف الفروع في حالة توطينها في الدول الخمسة. المطلوب: تخصيص فروع الإنتاج على الدول الخمسة بحيث تنتج تلك اللواحق بأقل تكلفة كلية ممكنة.

دولة5	دولة4	دولة3	دولة2	دولة1	
11	18	9	5	10	فرع الانتاج1
5	12	6	19	13	فرع الانتاج2
5	4	4	2	3	فرع الانتاج3
15	17	12	9	18	فرع الانتاج4
10	19	14	6	11	فرع الانتاج5

الحل:

المحاولة الأولى

6	11	3	0	4
0	5	0	14	7
3	0	1	0	0
6	6	2	0	8
4	11	7	0	4

تابع للمحاولة الأولى

6	11	3	0	4	×
0	5	0	14	7	
3	0	1	0	0	
6	6	2	0	8	×
4	11	7	0	4	×

المحاولة الثانية

4	9	1	0	2
0	5	0	16	7
3	0	1	2	0
4	4	0	0	6
2	9	5	0	2

تابع للمحاولة الثانية

4	9	1	0	2	×
0	5	0	16	7	
3	0	1	2	0	
4	4	0	0	6	
2	9	5	0	2	×

المحاولة الثالثة				
3	8	0	0	1
0	5	0	17	7
3	0	1	3	0
4	4	0	1	6
1	8	4	0	1

		×	×		
تابع للمحاولة الثالثة					
3	8	0	0	1	×
0	5	0	17	7	
3	0	1	3	0	
4	4		1	6	×
1	8	4	0	1	×

المحاولة الرابعة				
2	7	0	0	0
0	5	1	18	7
3	0	2	4	0
3	3	0	1	5
0	7	4	0	0

من الجدول الرابع يتضح أن التخصيص الأمثل لفروع الإنتاج على الدول الذي يسمح للمؤسسة تخفيض تكاليف إنتاجها هو: تخصيص فرع الإنتاج الأول للدولة الأولى، فرع الإنتاج الثاني للدولة الخامسة، فرع الإنتاج الثالث للدولة الرابعة، فرع الإنتاج الرابع للدولة الثالثة وفرع الإنتاج الخامس للدولة الثانية. بتكلفة إنتاج دنيا تساوي **37** و.ن.

المبحث الثاني

حل مسألة التخصيص في حالة تعظيم دالة الهدف

في حالة البحث عن تعظيم دالة الهدف لمسألة التخصيص يجب إتباع الخطوات التالية:

1- تحديد أكبر قيمة في جدول معطيات مسألة التخصيص وطرحها من نفسها وطرح القيم الأخرى منها.

2- بعد هذا نتبع نفس الخطوات كما في حالة التدنية.

مثال1:

تقوم مزرعة بإنتاج أربع منتجات فلاحية مختلفة، هناك إمكانية لبيع هذه المنتجات في أربعة نقاط بيع مختلفة. الجدول التالي يعطي رقم المبيعات المتوقع في كل نقاط البيع الأربعة.

المطلوب: تخصيص المنتجات الأربعة على نقاط البيع من أجل تحقيق أكبر رقم مبيعات ممكن.

	المنتج1	المنتج2	المنتج3	المنتج4
نقطة البيع1	15	9	6	3
نقطة البيع2	9	12	7,5	4,5
نقطة البيع3	13,5	4,5	12	7,5
نقطة البيع4	10,5	10,5	4,5	6

نقوم بتحديد أعلى قيمة في الجدول وهي **15**، ثم نطرح هذه القيمة من نفسها ونطرح منها كافة القيم الأخرى، فنحصل على الجدول التالي:

12	9	6	**0**
7,5	**4,5**	**0**	**6**
6	**1,5**	**9**	**1,5**
4,5	**6**	**0**	**4,5**

نقوم الآن بتطبيق نفس خطوات الحل كما في حالة التدنية:

-بعد تطبيق خطوات المرحلة الأولى والثانية نحصل على جدولي القيم التاليين:

7,5	**7,5**	**6**	**0**
3	**3**	**0**	**3**
1,5	**0**	**9**	**0**
0	**4,5**	**0**	**0**

7,5	**7,5**	**6**	**0**
3	**3**	**0**	**3**
1,5	**0**	**9**	**0**
0	**4,5**	**0**	**0**

يشير الجدول الثاني المتضمن للمحاولة الأولى للتخصيص أن الحل المتحصل عليه هو حل أمثل، والذي يعني هذه الحالة أن أعظم رقم مبيعات يمكن تحقيقه يساوي **45** و.ن. وذلك بتخصيص نقطة البيع الأولى للمنتج الأول، نقطة البيع الثانية للمنتج الثاني، نقطة البيع الثالثة للمنتج الثالث ونقطة البيع الرابعة للمنتج الرابع.

المبحث الثالث
الحالات الخاصة لمسالة التخصيص

أهم حالة من الحالات الخاصة لمسألة التخصيص هي حالة عدم تساوي صفوف وأعمدة جدول معطيات مسألة التخصيص.

لقد أشرنا سابقا أنه من ضمن شروط استعمال الطريقة الهنقارية في حل مسائل التخصيص هو ضرورة تساوي الصفوف والأعمدة في جدول المعطيات وذلك لضرورة تساوي عدد المهم المطلوب تنفيذها مع عدد المنفذين. لكن قد يحدث في الواقع أن تكون هذه الأعداد غير متساوية وبالتالي عدم تحقق الشرط المشار إليه.

لا يمكن حل مسألة التخصيص في حالتها غير المتوازنة، ومن أجل تصحيح هذا الخلل يجب إتباع الخطوات التالية:

– في حالة البحث على تدنية دالة الهدف: إضافة صف أو عمود وهمي إلى الصفوف أو الأعمدة الناقصة (بمعنى إضافة منفذ أو مهمة إضافية) بقيم تخصيص تساوي صفر، ثم مواصلة الحل حسب المراحل والخطوات السابق الإشارة إليها.

– في حالة البحث على تعظيم دالة الهدف: البحث على أكبر قيمة من قيم المعطيات وطرحها من نفسها وطرح القيم الأخرى منها، ثم بعد ذلك يضاف إلى جدول المعطيات المحصل عليه صف أو عمود وهمي بقيم تخصيص صفرية.

مثال:

تبحث شركة تجارية عن ثلاثة ممثلين تجاريين لتسويق منتجاتها الثلاثة في سوق معينة على أساس أن كل واحد يتكفل بتسويق منتج واحد فقط، فتقدم إليها أربعة

متعاملين تجاريين خواص بعروض تتمثل في تكاليف التسويق التي يقترحونها من أجل تسويق المنتجات المقترحة.

الجدول التالي يعطي قيم تكاليف التسويق المقترحة من طرف المترشحين لتسويق المنتجات الثلاثة. المطلوب تخصيص المنتجات على الممثلين التجاريين الذي يحقق أقل تكلفة تسويق ممكنة.

	منتج1	منتج2	منتج3
ممثل ت.1	15	22,5	13,5
ممثل ت.2	13,5	27	7 ,5
ممثل ت.3	9	21	4,5
ممثل ت.4	12	24	9

هذه المسألة تتعلق بالبحث عن تدنية دالة الهدف، وهي تتميز بزيادة عدد الصفوف عن عدد الأعمدة، فنضيف صفا وهميا يمثل **منتجا وهميا** ونخصص له عودا إضافيا (رابعا)، حتى تصبح المسألة متوازنة.

15	22,5	13,5	0
13,5	27	7 ,5	0
9	21	4,5	0
12	24	9	0

المحاولة الأولى:

6	1,5	9	0
4,5	6	3	0
0	0	0	0
3	3	4,5	0

				×
×	6	1,5	9	0
×	4,5	6	3	0
	0	0	0	0
×	3	3	4,5	0

المحاولة الثانية:

0	7,5	0	4,5
0	1,5	4,5	3
1,5	0	0	0
0	3	1,5	1,5

×				
0	7,5	0	4,5	
0	1,5	4,5	3	×
1,5	0	0	0	
0	3	1,5	1,5	×

1,5	7,5	0	4,5
0	0	3	1,5
3	0	0	0
0	1,5	0	0

بعد المحاولة الثانية نلاحظ أن عدد الخانات المخصصة يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة وبالتالي فالحل المحصل عليه هو حل أمثل. أدنى تكلفة تسويق تتحملها المؤسسة التجارية من أجل تسويق منتجاتها تساوي(22,5 + 7,5 + 9 +0 و.ن.)، وذلك بمنح المنتج الأول للمثل التجاري الثالث، المنتج الثاني للممثل التجاري الأول، المنتج الثالث للممثل التجاري الثاني أما الممثل التجاري الرابع فلا يؤخذ عرضه بعين الاعتبار ويقصى.

تمارين

أوجد أدنى قيمة لدالة الهدف لمسألة التخصيص وفق المعطيات التالية:

1	2	3	4	5
1	4	2	5	3
3	2	1	5	4
1	2	3	5	4
2	1	4	3	5
Rép :				

24	24	21	18
39	42	36	27
21	15	18	9
30	36	39	39
Rép: 93			

1.5	9	4.5	1.5
6.5	14	2	13
19	9.5	9	7.5
9.5	13	12	5
Rép : 18			

4	15	7	8	12
10	14	17	9	7
7	6	12	6	9
10	6	14	6	7
6	10	12	6	9
Rép : 32				

100	140	80
60	100	60
80	120	40
Rép :240		

4	5	3	3	2
2	6	4	2	4
3	4	2	2	2
0	2	0	1	0
Rép : 9				

55	60	50	65
100	75	200	65
30	50	35	25
Rép :145			

10	7	5	3	7
7	8	90	80	6
85	5	1	5	6
14	10	100	3	10
10	2	5	4	70
Rép :20				

12	5,5	9	15	17,5
10,5	5	10,5	16,5	16
5,5	11	14,5	15,5	12
13	17,5	14	8	4,5
17,5	12	8,5	9,5	13
Rép :33,5				

3	7	5	3	7
7	8	35	40	6
45	5	1	5	6
14	10	25	3	10
10	2	5	4	32
Rép :15				

4	5	3	3	2
2	6	4	2	4
3	4	2	2	2
5	3	4	3	4
0	2	0	1	0
Rép :9				

25	16	15	14	13
25	17	18	23	15
30	15	20	19	14
27	20	22	25	12
29	19	17	32	10
Rép :15				

1	5	5	2	3
1	5	3	1	4
4	1	0	2	0
1	4	5	3	3
2	5	4	6	6
Rép :10				

أوجد أعظم قيمة لدالة الهدف لمسألة التخصيص حسب المعطيات التالي:

20	41	33	10
60	50	17	24
29	62	32	39
37	39	27	22
Rép :177			

20	10	13	7
18	15	12	9
20	12	11	7
19	11	12	8
20	13	13	8
Rép :67			

135	45	75	120
120	45	90	105
105	60	75	135
Rép :360			

5	4	5	12	11	4	17
10	9	6	10	12	16	4
9	3	2	8	13	14	8
13	1	7	11	7	18	19
2	1	12	8	3	7	5
3	11	13	9	14	20	21
10	2	6	6	15	15	22
Rép :101						

30	12	3	2	25
5	4	11	26	17
27	28	29	10	15
13	21	19	23	15
20	14	1	26	6
Rép :123				

6	3	5	4	6	7	8
5	2	4	3	8	9	10
4	3	3	5	4	6	7
7	5	3	2	1	4	5
8	6	6	10	12	5	4
12	7	8	7	4	8	9
4	8	9	6	7	4	3
Rép :60						

الفصل الثالث
نظرية الشبكات
القسم الأول
شبكات النقل

يهتم أسلوب شبكات النقل بحل كثير من المسائل الاقتصادية والتقنية، منها خاصة مسائل نقل المسافرين والبضائع أو نقل وتوزيع مواد مثل الماء، الغاز، الكهرباء، التلفون، قنوات الصرف الصحي وغيرها. من أجل معالجة مختلف الجوانب المتعلقة بهذه المسائل نلجأ إلى استخدام تقنية الشبكات.

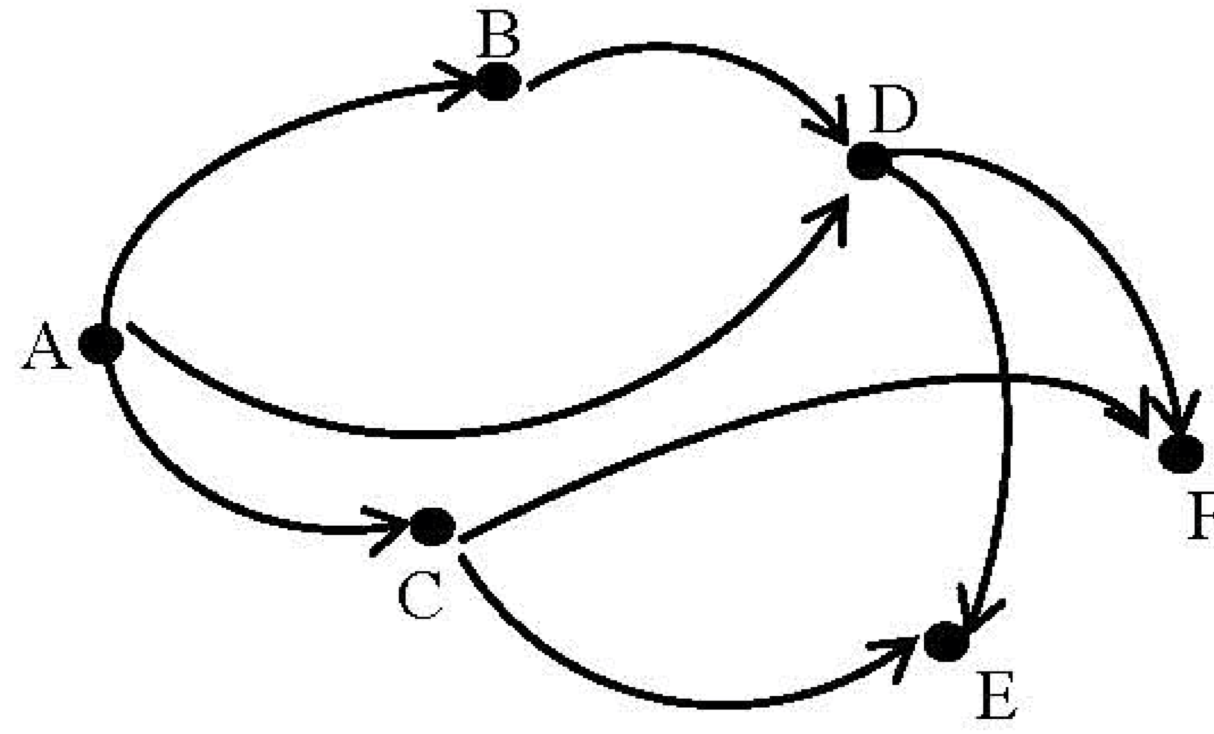
من بين تطبيقات نظرية شبكات النقل يمكن ذكر مسائل البحث عن المسارات ذات القيمة المثلى (**les chemins de valeur optimale**)، مسألة التدفق الأعظم عبر شبكة (**le problème de flot maximal**)، مسألة المسافر التجاري وغيرها.

المبحث الأول
البحث عن المسارات ذات القيمة المثلى

قبل البدء في معالجة هذا الموضوع سوف نعطي لمحة مختصرة عن أهم المصطلحات والمفاهيم الأساسية المستعملة في تكوين الشبكات.

الشبكة (**le graphe**): هو هيكل يحتوي على مجموعة من العناصر(**X**) تسمى بالرؤوس ومجموعة أخرى من العناصر (**U**) تسمى بالأقواس، ويرمز للشبكة بالرمز (**U**(**X**. تمثل الرؤوس على الرسم بنقاط والأسهم بأقواس.

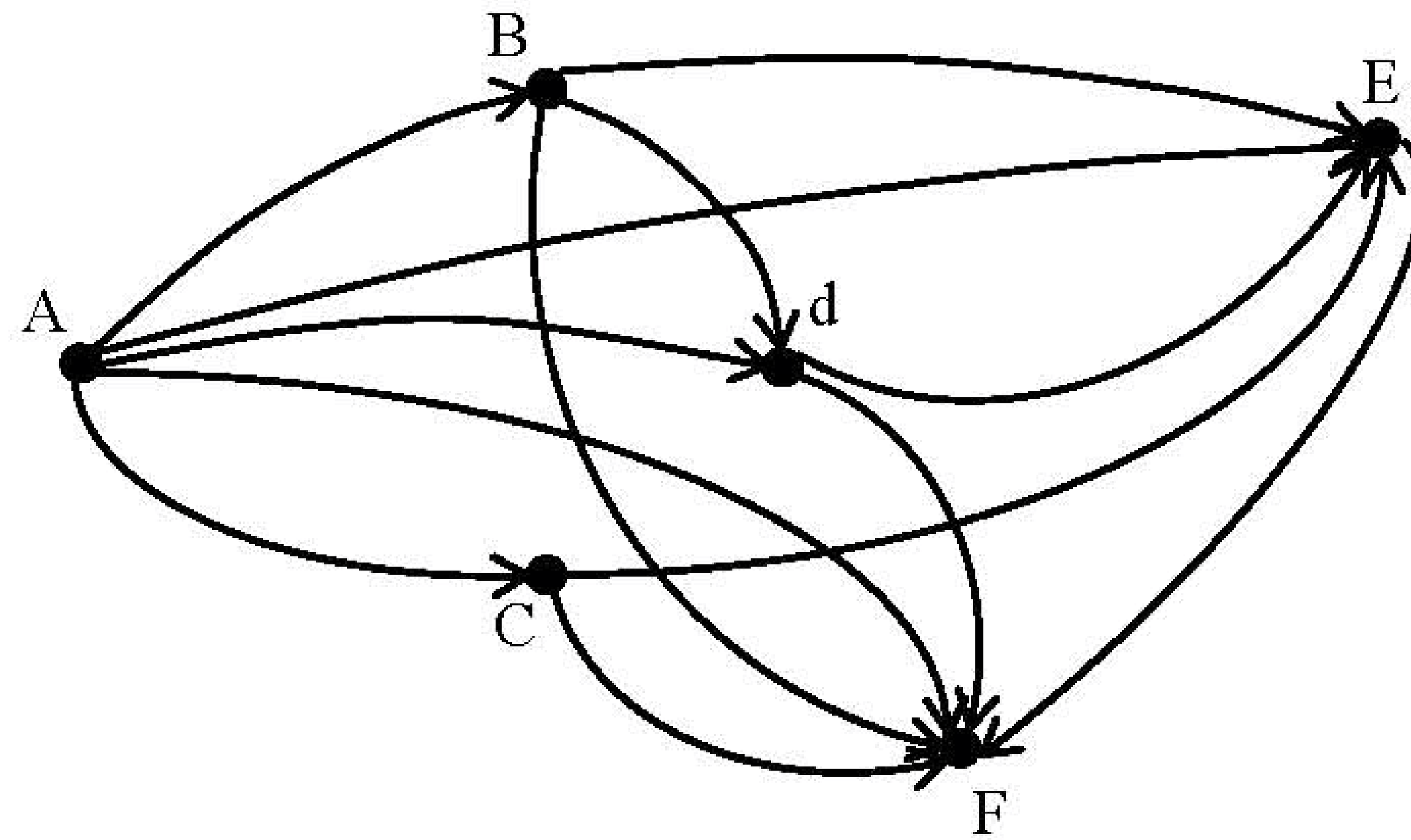
لتكن النقاط التالية (A,B,C,D,E,F) وعدد من الأسهم التي تجمع بعض هذه النقاط في ما بينها.



المجموعة X = (A, B, C, D, E, F) وترمز إلى الرؤوس، والمجموعة U= (AB, AC, AD, BD, CF, DE, DF, CE) ترمز إلى الأسهم التي تجمع هذه الرؤوس في ما بينها.

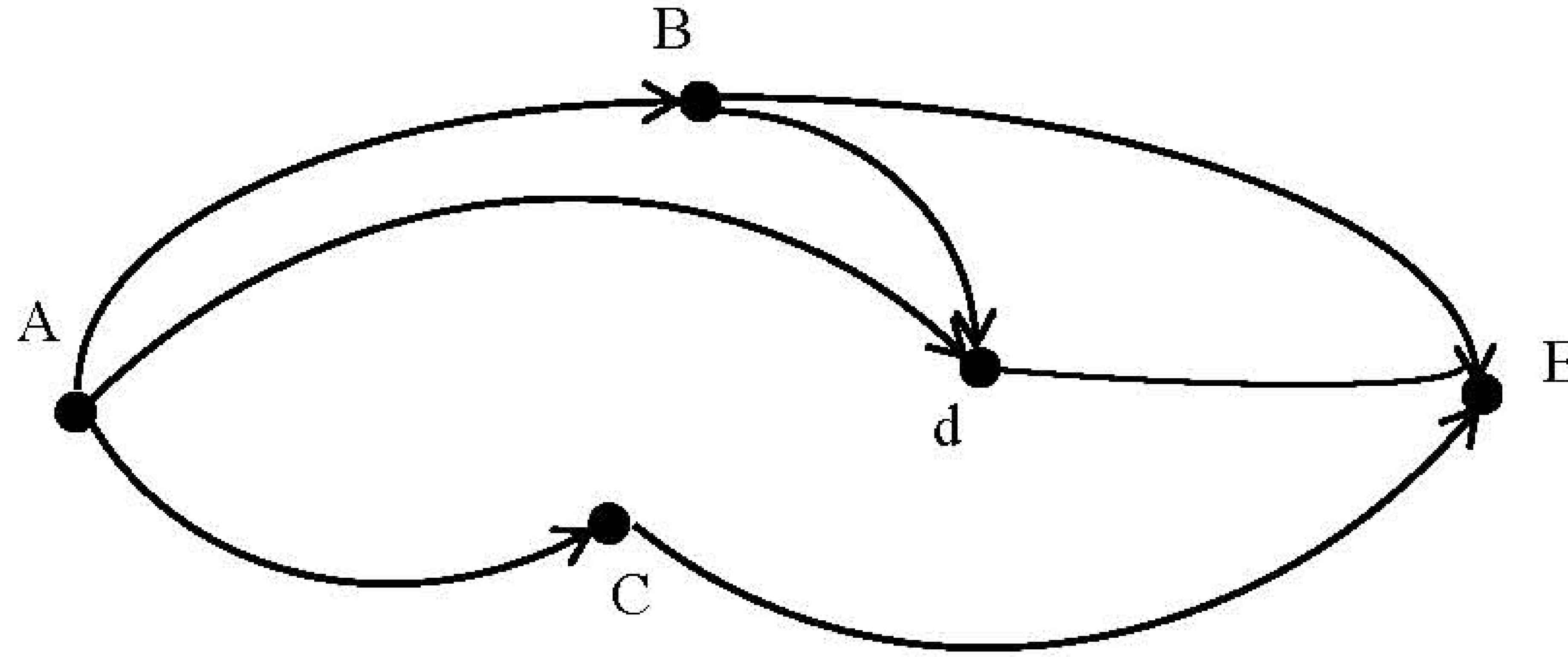
الشبكة الكاملة (**le graphe complet**): هو هيكل يكون فيه أي رأس من الرؤوس مرتبط بكل من الرؤوس الأخرى على الأقل مرة واحدة.

الشبكة التالية تمثل شبكة من النوع الكامل:



الشبكة الموجهة (le graphe orienté): الشبكة الموجهة هي هيكل يتكون من رؤوس تربطها أسهم موجهة، بمعنى أن السير فيها يخضع لاتجاه الأسهم.

الرسم التالي يمثل شبكة من النوع الموجه:



الشبكة غير الموجهة (le graphe non orienté): هي هيكل يتكون من رؤوس تربطها أسهم غير موجهة، في هذا النوع من الشبكات يسمى السهم الذي يربط أي رأسين "**بالحد**" (**une arête**)، فالسهم ($\overrightarrow{AC}$) في الشبكة السابقة إذا لم يكن غير موجه فهو يعبر عـــن الحد[**AC**] أو الحد[**CA**].

المسار (le chemin): في أي شبكة، نسمي مساراكل سلسلة متصلة من الأسهم ($u_1,u_2,...,u_p$) التي يكون فيها الطرف النهائي لكل منها هو عبارة عن الطرف الابتدائي للسهم الذي يليه، ما عدا السهم الأخير.

الحلقة (la boucle): المسار الذي يكون فيه الطرف النهائي للسهم الأخير هو عبارة عن الطرف الابتدائي للسهم الأول، يسمى بالمسار المغلق أو الحلقة. طول أي مسار هو عبارة عن مجموع القيم التي تعبر عنها الأسهم المشكلة للشبكة وتسمى عادة بالقيم المرافقة.

إن مسائل تحديد المسارات ذات القيمة المثلى (الدنيا أو العظمى) كثيرا ما نصادفها في بحوث العمليات، يتمثل الأمر في تحديد أقصر (أو أعظم) مسار بين رأسين ينتميان إلى شبكة ما.

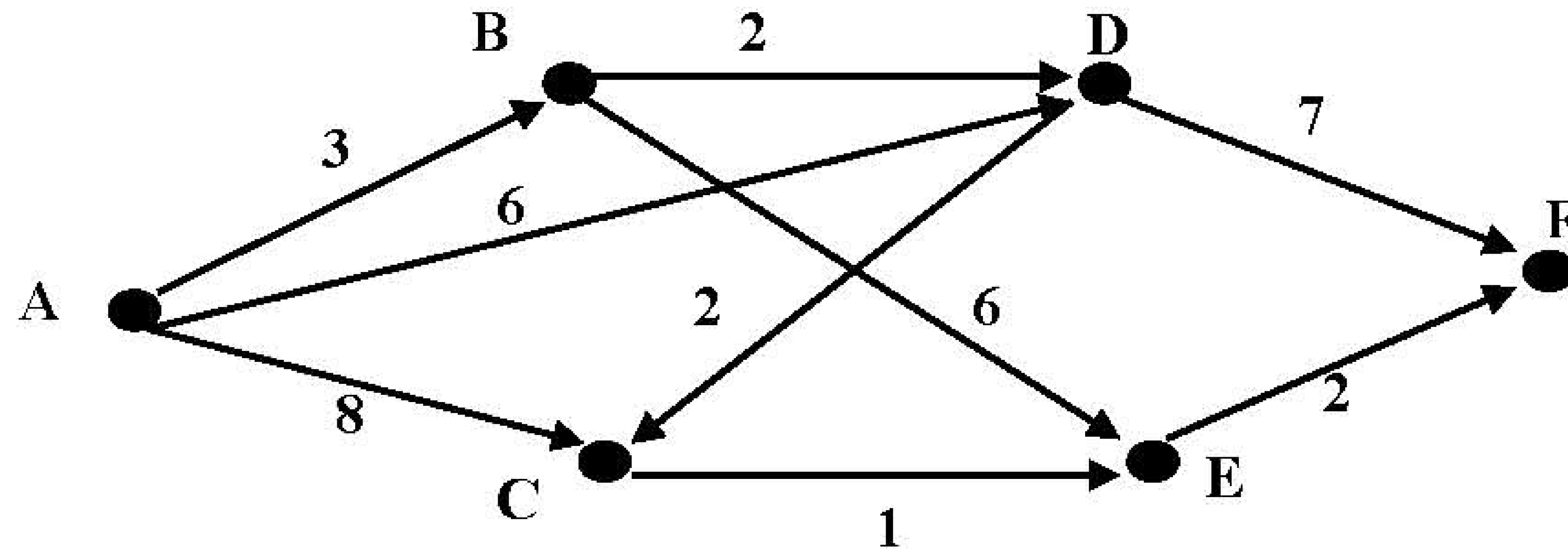
ليكن لدينا شبكة ما $G(U,X)$، كل قوس $U(X_i,X_j)$ في هذه الشبكة ترافقه قيمة $L(X_i,X_j)$ تسمى بقيمة القوس أو القيمة المرافقة، ونبحث عن مسار ما ينطلق من الرأس الابتدائي وينتهي عند الرأس النهائي، بحيث أن القيمة الكلية لقيمه المرافقة تكون أقل أو أعظم ما يمكن: $\sum L(U) = max(min)$.

القيمة المرافقة للقوس $L(X_i,X_j)$ يمكن أن تكون تكلفة، مدة زمنية، طول مسافة،...، إلخ، ونحن نبحث عن المسار ذو المسافة الأقل، ذو التكلفة الأقل، ذو المدة الزمنية الأقل أو غيرها وذلك حسب طبيعة الشبكة المعطاة والمسألة المعالجة.

مثال:

لتكن لدينا الشبكة التالية الممثلة للطرق التي تجمع مجموعة من الأحياء في مدينة معينة، القيم الموجودة على الأسهم هي مسافات كيلومترية، إذا افترضنا أن السير عبر هذه الطرق هو في اتجاه واحد من النقطة (**A**) إلى النقطة (**F**).

توجد عدة مسارات تؤدي من (**A**) إلى (**F**)، ونستطيع أن نرسم شبكة تعكس هذا التمثيل الجغرافي الذي رؤوسه هي عبارة عن نقاط عبور بين الأحياء عبر هذه الطرق والأسهم هي الطرق بين هذه الرؤوس. نبحث الآن، لكل رأس من هذه الرؤوس، عن طول أقصر مسار الذي يؤدي إليه انطلاقا من **A**.



إذا ما اتبعنا منهج التحليل البسيط فإننا نلاحظ ما يلي:

بالنسبة للنقطة **B** أقصر مسار إليها هو الطريق **AB** الذي طوله (**3**).

بالنسبة للنقطة D أقصر مسار إليها هو الطريق **ABD** الذي طوله (**5**) **وليس** **AD** (6).

أما النقطة **C** فأقصر مسار إليها هو الطريق **ABDC** الذي طوله (**7**) وليس **AC** (**7**) **أو** **ADC** (**7**) أيضا.

أقصر مسار إلى النقطة **E** هو **ABDCE** بطول (**8**) وليس **ABE** (**9**) أو **ACE** (**9**) أو **ADCE**.

وأخيرا فإن الذهاب إلى النقطة **F** انطلاقا من النقطة **A** يتطلب المرور عبر النقاط **ABDCEF** وهو يشكل أدنى مسار بطول يساوي **10**.

لكن إذا كانت الشبكة كبيرة ومعقدة (تحتوي على كثير من الرؤوس وتوجد بينها كثير من الأسهم)، فإن إتباع المنهج البسيط السابق يؤدي إلى طول الحسابات وتعقدها وإلى إمكانية الخطأ. هذا من جهة ومن جهة أخرى فإنه واضح أنه إذا أصبحتV أقصر المسافات بين (**A**) مثلا والنقاط (**B,C,D**) معروفة، فإنه في

هذه الحالة يصبح من غير الضروري من أجل معرفة أقصر مسافة بين (**A**) و(**E**) أن نعيد الحساب من (**A**). بل يكفي فقط الحساب من النقاط التي تجمعها بـ (**E**) بأسهم.

لذلك توجد هناك عدة طرق تستعمل من أجل استخراج قيمة المسار ذو القيمة الأصغر، من بينها طريقة **FORD**.

الفرع الأول: طريقة FORD

أولا: إيجاد المسار ذو القيمة الدنيا

من أجل إيجاد المسار ذي القيمة الدنيا عبر شبكة باستخدام هذه الطريقة، يجب إتباع الخطوات التالية:

1- نرقم رؤوس الشبكة ترقيما تسلسليا معينا: كأن نعطي للرأس الأول القيمة (**a**) والرأس الأخير القيمة (F)، حيث أن عدد الرؤوس هو **n**.

2- إعطاء قيم (λ_i) لرؤوس الشبكة، بحيث نعطي للرأس الابتدائي (**a**) القيمة ($\lambda_i = 0$) أما الرؤوس الأخرى فنعطيها قيما مؤقتة ($\lambda_i = \infty$).

3- نرمز للقيمة المرافقة (العدد المرافق للسهم) بالرمز $L_{(i,j)}$.

4- نبدأ بالرأس الابتدائي (**a**) ونتفحص جميع الأسهم التي تنطلق منه، ثم نحسب كل قيم (λ_j) الموجودة عند الرؤوس التي تنتهي عندها هذه الأسهم.

5- ننتقل إلى الرأس الموالي مباشرة (**b**) ونتفحص هنا أيضا كل الأسهم التي تنطلق منه ونحسب كل قيم (λ_j) الموجودة عند نهاية هذه الأسهم. وهكذا حتى نصل إلى الرأس الأخير (x_{n-1}).

كيف يتم حساب قيم (λ_j)؟

يتم حساب قيم (λ_j) الموجودة عند نهاية الأسهم كالتالي:

إذا كان لدينا سهم ما رأسه الابتدائية هو (x_i) ورأسه النهائي هو (x_j)، والقيم الموجودة عند هذين الرأسين هي (λ_i) و(λ_j) على التوالي، فنقوم بطرح القيمتين من بعضهما، أي نحسب ($\lambda_j - \lambda_i$).

إذا كانت: $\lambda_j - \lambda_i > L(x_i, x_j)$.

فإنه يجب إعادة حساب قيمة (λ_j) السابقة الموجودة عند الرأس (x_j) بالقيمة التالية: $\lambda_j = \lambda_i + L(x_i, x_j)$

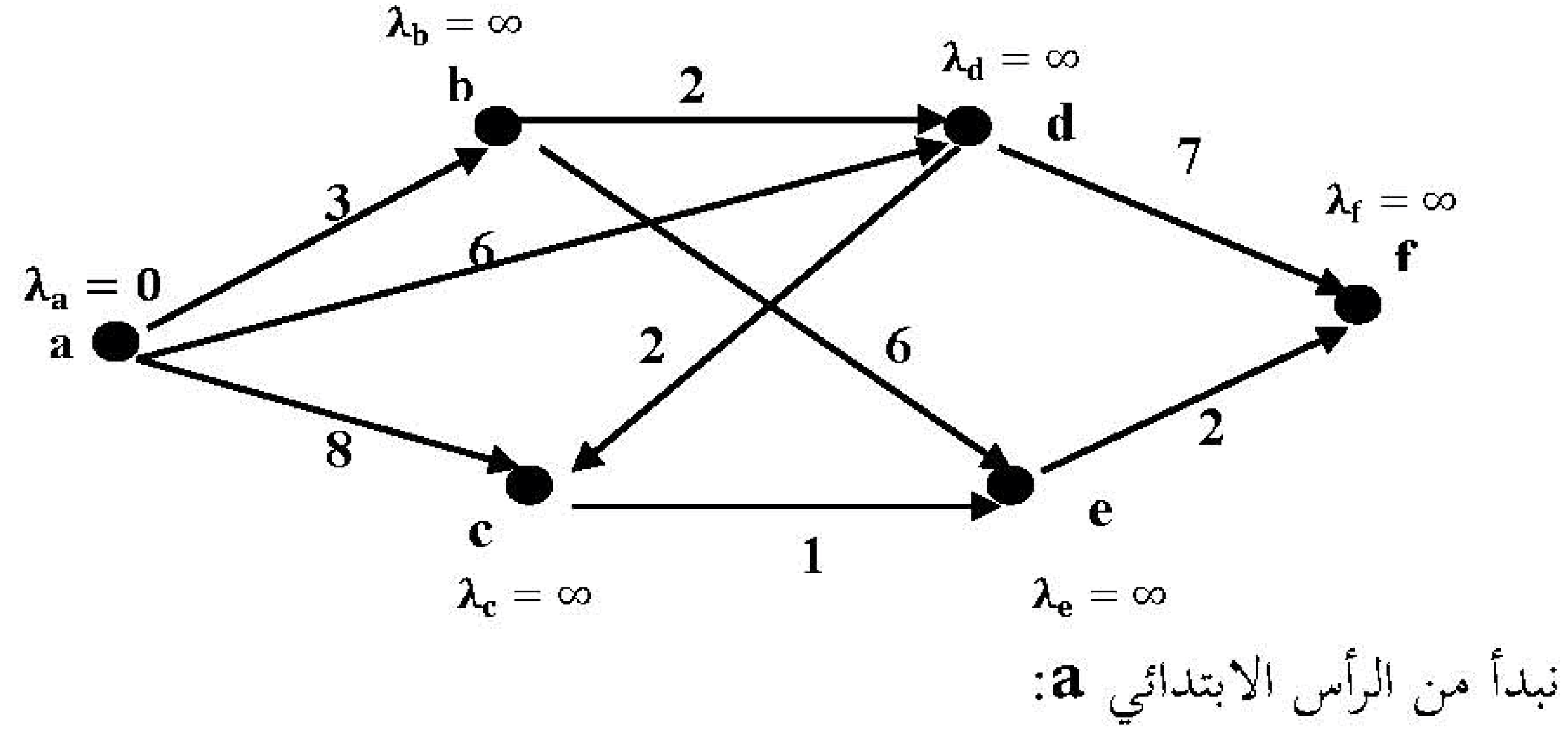
أما إذا كانت: $\lambda_j - \lambda_i \leq L(x_i, x_j)$. فإن قيمة ($\lambda_j$) تبقى كما كانت سابقا.

إذا كان دليل الطرف الأيمن للسهم وهو (**i**) أكبر من دليل طرفه النهائي (**j**)، أي: $i > j$، فيجب وضع ($i = j$) وإعادة الحساب من قيمة (i).

نستمر هكذا في إعادة حساب قيم (λ_j) حتى نصل إلى الرأس النهائي للشبكة.

نرجع إلى المثال السابق ونستخدم طريقة **Ford** في إيجاد المسار ذي القيمة الدنيا.

نرقم رؤوس الشبكة من (a) إلى (F)، ثم نعطي لهذه الرؤوس قيما نسميها مثلا λ_i ، بحيث نضع $\lambda_a = 0$ وبقية (λ_i) تساوي (∞)، وذلك كما يلي:



نبدأ من الرأس الابتدائي **a**:

$i = a\ ,\ j = b\quad ,\ L(a\ ,b) = 3$

$\lambda_b - \lambda_a = \infty - 0 = \infty$

$\lambda_b - \lambda_a > L(a\ ,b)$

$\infty > 3$

هذه النتيجة تعني أنه يجب إعادة حساب قيمة λ_b حسب الصيغة التالية:

$\lambda_b = \lambda_a + L(a\ ,b)$

$\lambda_b = 0 + 3 = 3$

$i = a\ ,\ j = c\quad ,\quad L(a\ ,c) = 8$

$\lambda_c - \lambda_a = \infty - 0 = \infty$

$\lambda_c - \lambda_a > L(a\ ,c)$

$\infty > 8$

هذه النتيجة تظهر أنه يجب إعادة حساب قيمة λ_c حسب الصيغة التالية:

$\lambda_c = \lambda_a + L(a\ ,c)$

$\lambda_c = 0 + 8 = 8$

$i = a\ ,\ j = d\quad ,\quad L(a\ ,d) = 6$

$\lambda_d - \lambda_a = \infty - 0 = \infty$

$\lambda_d - \lambda_a > L(a\ ,d)$

$\infty > 6$

نعيد هنا أيضا حساب قيمة λ_d حسب الصيغة التالية:

$\lambda_d = \lambda_a + L(a, d)$

$\lambda_d = 0 + 6 = 6$

ننتقل إلى الرأس (b)

$i = b, j = d$, $L(b, d) = 2$

$\lambda_d - \lambda_b = 6 - 3 = 3$

$\lambda_d - \lambda_b > L(b, d_3)$

$3 > 2$

نعيد حساب قيمة λ_d حسب الصيغة التالية:

$\lambda_d = \lambda_b + L(b, d_3)$

$\lambda_d = 3 + 2 = 5$

$i = b, j = e$, $L(b, e) = 6$

$\lambda_e - \lambda_b = \infty - 3 = \infty$

$\lambda_b - \lambda_e > L(b, e)$

$\infty > 6$

نعيد إذن حساب قيمة λ_e حسب الصيغة التالية:

$\lambda_e = \lambda_b + L(b, e)$

$\lambda_e = 3 + 6 = 9$

ننتقل إلى الرأس (C).

$i = c, j = e$, $L(c, e) = 1$

$\lambda_e - \lambda_c = 9 - 8 = 1$

$\lambda_e - \lambda_c = L(c, e)$

$1 = 1$

في هذه الحالة قيمة λ_e السابقة تبقى كما هي وتساوي $\lambda_e=9$.

ننتقل إلى الرأس (d).

$\mathbf{i = d , j = c}$, $\mathbf{L (d ,c) = 2}$

$\lambda_c - \lambda_d = 8 - 5 = 3$

$\lambda_c - \lambda_d > L (d ,c)$

$3 > 2$

نعيد إذن حساب قيمة λ_c حسب الصيغة التالية:

$\lambda_2 = \lambda_3 + L (d ,c)$

$\lambda_c = 5 + 2 = 7$

هل ($\mathbf{i > j}$) نعم، إذن نضع ($\mathbf{i = j = c}$) ثم نعيد حساب λ_j من جديد، أي من الر أس **c**.

نعيد الانتقال إلى الرأس (c).

$\mathbf{i = c , j = e}$, $\mathbf{L (c ,e) = 1}$

$\lambda_e - \lambda_c = 9 - 7 = 2$

$\lambda_e - \lambda_c > L (c ,e)$

$2 > 1$

نعيد إذن حساب قيمة λ_e حسب الصيغة التالية:

$\lambda_e = \lambda_c + L (c ,e)$

$\lambda_e = 7 + 1 = 8$

ننتقل إلى الرأس (d).

$\mathbf{i = d , j = c}$, $\mathbf{L (d ,c) = 2}$

$\lambda_c - \lambda_d = 7 - 5 = 2$

$\lambda_c - \lambda_d = L(d, c)$

$2 = 2$

في هذه الحالة قيمة λ_c السابقة تبقى كما هي وتساوي $\lambda_c = 7$

$i = d, j = F \quad , \quad L(d, F) = 7$

$\lambda_F - \lambda_d = \infty - 5 = \infty$

$\lambda_F - \lambda_d > L(d, F)$

$\infty > 7$

نعيد إذن حساب قيمة λ_F حسب الصيغة التالية:

$\lambda_5 = \lambda_3 + L(d, F)$

$\lambda_F = 5 + 7 = 12$

ننتقل إلى الرأس (e).

$i = e, j = F \quad , \quad L(e, F) = 2$

$\lambda_F - \lambda_e = 12 - 8 = 4$

$\lambda_F - \lambda_e > L(e, F)$

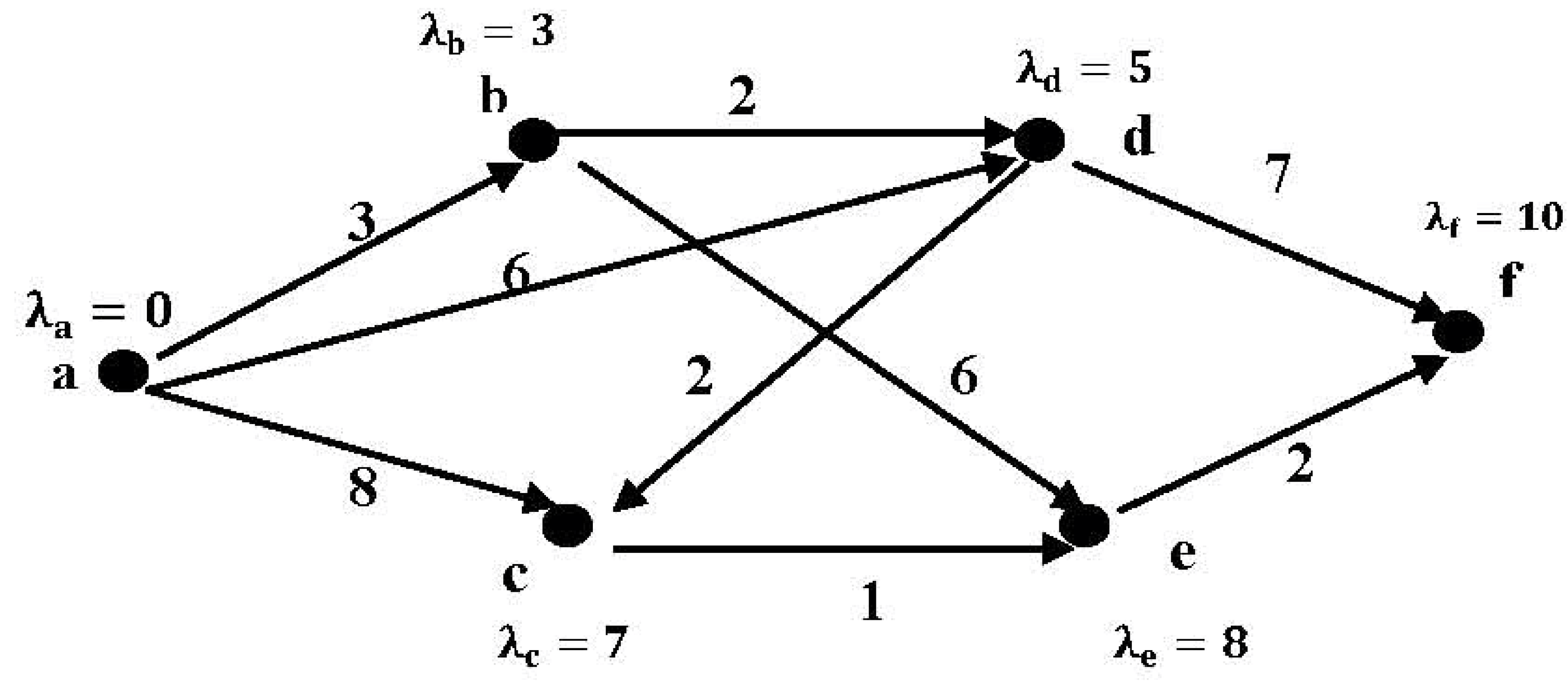
$4 > 2$

نعيد إذن حساب قيمة λ_F حسب الصيغة التالية:

$\lambda_F = \lambda_e + L(e, F)$

$\lambda_F = 8 + 2 = 10$

انتهينا الآن من حساب أقصر المسارات بين النقطة **A** وكل نقطة من نقاط الشبكة السابقة، والتي تدل عليها قيم (λ_j) الجديدة. فكل قيمة ل (λ_j) تعني قيمة أقصر مسار بين **A** والرأس(**j**). الشكل التالي يوضح هذه القيم:



من أجل تحديد المسار ذو **القيمة الدنيا** نفسه الذي يبدأ من a وينتهي عند F، يكفي أن نحدد انطلاقا من نهاية الشبكة، السهم الذي يكون الفرق بين قيم رؤوسه (λ_j - λ_i) وطول القيمة المرافقة له $L(_{i\,,\,j})$ متساويان.

$\lambda_F - \lambda_e = 10 - 8 = 2 = L(x_e, X_F)$

$\lambda_e - \lambda_c = 8 - 7 = 1 = L(x_c, X_e)$

$5 - 3 = L(x_b, X_d)$ $\qquad \lambda_c - \lambda_d = 7 - 5 = 2 = L(x_d, X_c)$

$\lambda_d - \lambda_b = 2 =$

$\lambda_b - \lambda_a = 3 - 0 = 3 = L(x_a, X_b)$

إذن المسار ذو القيمة الدنيا للتنقل من a إلى F هو: **a , b , d , c , e , F** بقيمة دنيا مقدارها **10**.

ثانيا: إيجاد المسار ذي القيمة العظمى.

من أجل إيجاد المسار ذي القيمة العظمى عبر شبكة باستخدام طريقة **Ford**، نتبع الخطوات التالية:

1- نرقم رؤوس الشبكة ترقيما تسلسليا معينا: كأن نعطي للرأس الأول القيمة (x_0) والرأس الأخير القيمة (x_{n-1})، حيث أن عدد الرؤوس هو **n**.

2- نعطي قيم (λ_i) لرؤوس الشبكة ، بحيث نعطي **لكل** الرؤوس القيمة ($\lambda_i = 0$).

3- نرمز للقيمة المرافقة (العدد المرافق للسهم) بالرمز $L(x_i , x_j)$.

4- نبدأ بالرأس الابتدائي (x_0) ونتفحص جميع الأسهم التي تنطلق منه، ثم نحسب كل قيم (λ_j) الموجودة عند الرؤوس التي تنتهي عندها هذه الأسهم.

5- ننتقل إلى الرأس الموالي مباشرة وهو (x_1) ونتفحص هنا أيضا كل الأسهم التي تنطلق منه ونحسب كل قيم (λ_j) الموجودة عند نهاية هذه الأسهم. وهكذا حتى نصل إلى الرأس الأخير (x_{n-1}).

كيف يتم حساب قيم (λ_j) في هذه الحالة؟

يتم حساب قيم (λ_j) الموجودة عند نهاية الأسهم كالتالي:

إذا كان لدينا سهم معين رأسه الابتدائي هو (x_i) ورأسه النهائي هو (x_j)، والقيم الموجودة عند هذين الرأسين هي (λ_i) و(λ_j) على التوالي، فنقوم بطرح القيمتين من بعضهما، أي نحسب ($\lambda_j - \lambda_i$).

إذا كانت: $\lambda_j - \lambda_i < L(x_i , x_j)$.

فإنه يجب إعادة حساب قيمة (λ_j) السابقة الموجودة عند الرأس (x_j) باستخدام العلاقة التالية:

$$\lambda_j = \lambda_i + L(x_i, x_j)$$

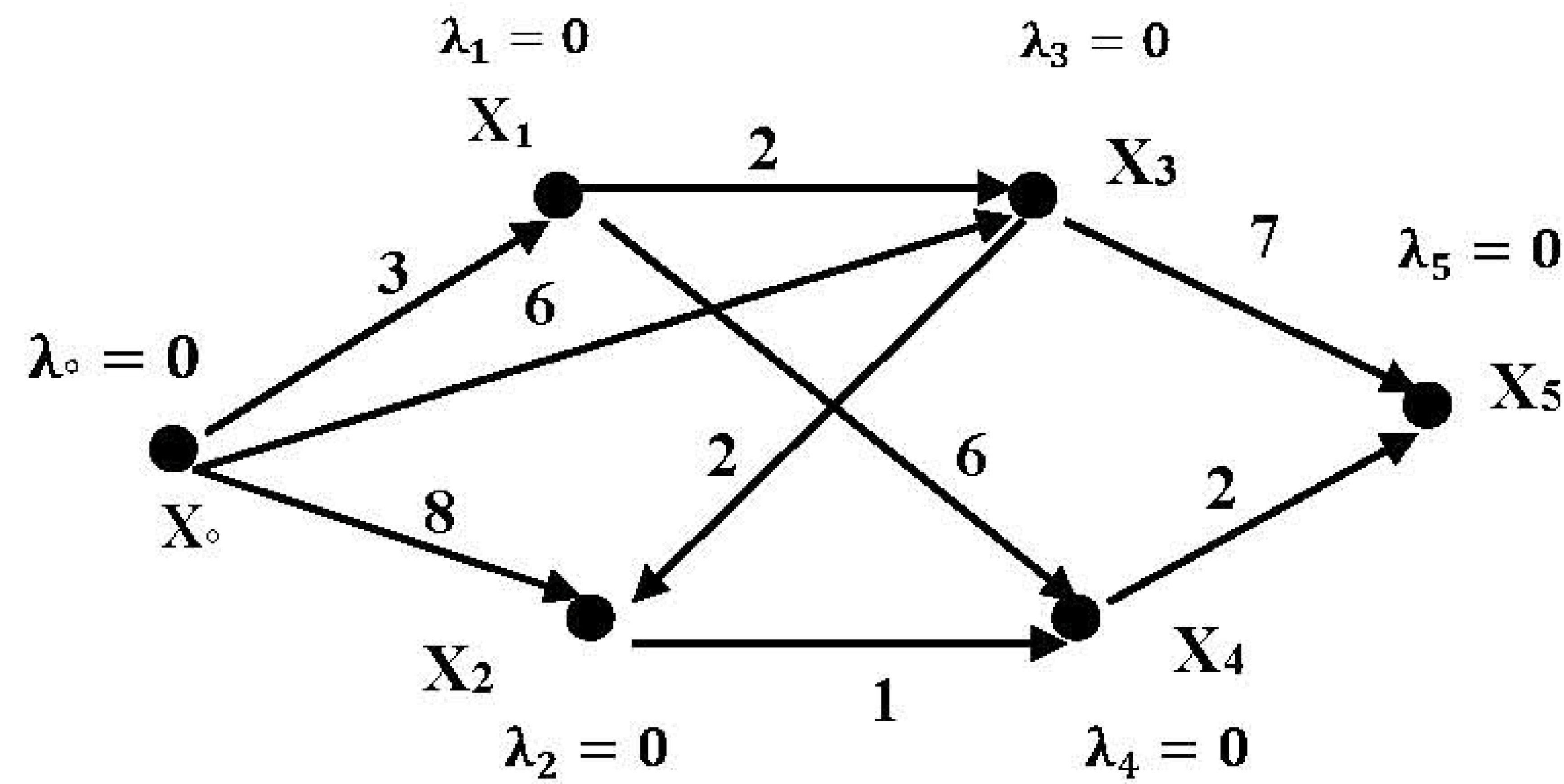
أما إذا كانت: $(\lambda_j - \lambda_i \geq L(x_i, x_j))$. فإن قيمة (λ_j) تبقى كما كانت سابقا.

إذا كان دليل الطرف الأيمن للسهم وهو $(\mathbf{i})$ أكبر من دليل طرفه النهائي $(\mathbf{j})$، أي: $i > j$، فيجب وضع $(i = j)$ وإعادة الحساب من قيمة (i).

نستمر هكذا في إعادة حساب قيم (λ_j) حتى نصل إلى الرأس النهائي للشبكة.

بالاعتماد على معطيات المثال السابق واستخدام طريقة **Ford** نجد المسار ذو القيمة العظمى للانتقال من الرأس الابتدائي إلى الرؤوس الأخرى.

نرقم رؤوس الشبكة من (X_0) إلى (X_5)، ثم نعطي لهذه الرؤوس قيما نسميها مثلا λ_i، بحيث نضع كل القيم $\lambda_i = 0$ $(\lambda_0 = 0)$ وبقية (λ_i) تساوي أيضا صفر)، وذلك كما يلي:



نبدأ من الرأس الابتدائيx_0:

$i = 0 , j = 1 \quad , \quad L(x_0, x_1) = 3$

$\lambda_1 - \lambda_0 = 0 - 0 = 0$

$\lambda_1 - \lambda_0 < L(x_0, x_1)$

$0 < 3$

هذه النتيجة تعني أنه يجب إعادة حساب قيمة λ_1 حسب الصيغة التالية:

$\lambda_1 = \lambda_0 + L(x_0, x_1)$

$\lambda_1 = 0 + 3 = 3$

$i = 0 , j = 2 \quad , \quad L(x_0, x_2) = 8$

$\lambda_2 - \lambda_0 = 0 - 0 = 0$

$\lambda_2 - \lambda_0 < L(x_0, x_2)$

$0 < 8$

هذه النتيجة تظهر أنه يجب إعادة حساب قيمة λ_2 حسب الصيغة التالية:

$\lambda_2 = \lambda_0 + L(x_0, x_2)$

$\lambda_2 = 0 + 8 = 8$

$i = 0 , j = 3 \quad , \quad L(x_0, x_3) = 6$

$\lambda_3 - \lambda_0 = 0 - 0 = 0$

$\lambda_3 - \lambda_0 < L(x_0, x_2)$

$0 < 6$

نعيد هنا أيضا حساب قيمة λ_3 حسب الصيغة التالية:

$\lambda_3 = \lambda_0 + L(x_0, x_3)$

$\lambda_3 = 0 + 6 = 6$

ننتقل إلى الرأس (X_1).

$i = 1 , j = 3 \quad , \quad L(x_1, x_3) = 2$

$\lambda_3 - \lambda_1 = 6 - 3 = 3$

$\lambda_3 - \lambda_1 > L(x_\circ, x_2)$

$3 > 2$

نبقي على قيمة λ_3 كما كانت سابقا $(\lambda_3 = 6)$.

$i = 1, j = 4$, $L(x_1, x_4) = 6$

$\lambda_4 - \lambda_1 = 0 - 3 = -3$

$\lambda_4 - \lambda_1 < L(x_1, x_4)$

$-3 < 6$

نعيد إذن حساب قيمة λ_4 حسب الصيغة التالية:

$\lambda_4 = \lambda_1 + L(x_1, x_4)$

$\lambda_4 = 3 + 6 = 9$

ننتقل إلى الرأس (X_2).

$i = 2, j = 4$, $L(x_2, x_4) = 1$

$\lambda_4 - \lambda_2 = 9 - 8 = 1$

$\lambda_4 - \lambda_2 = L(x_2, x_4)$

$1 = 1$

في هذه الحالة قيمة λ_4 السابقة تبقى كما هي وتساوي $\lambda_4=9$.

ننتقل إلى الرأس (X_3).

$i = 3, j = 2$, $L(x_3, x_2) = 2$

$\lambda_2 - \lambda_3 = 8 - 6 = 2$

$\lambda_2 - \lambda_3 = L(x_3, x_2)$

$2 = 2$

في هذه الحالة نبقي على قيمة λ_2 السابقة كما هي وتساوي $\lambda_2=8$.

هل ($i > j$) نعم، إذن نضع ($i = j = 2$) ثم نعيد حساب λ_j من جديد، أي من الر أس X_2 .

نعيد الانتقال إلى الرأس (X_2).

$i = 2 , j = 4$, $L(x_2 , x_4) = 1$

$\lambda_4 - \lambda_2 = 9 - 8 = 1$

$\lambda_4 - \lambda_2 = L(x_2 , x_4)$

$1 = 1$

نبقي على قيمة λ_4 السابقة كما هي وتساوي $\lambda_4 = 9$.

ننتقل إلى الرأس (X_3).

$i = 3 , j = 2$, $L(x_3 , x_2) = 2$

$\lambda_2 - \lambda_3 = 8 - 6 = 2$

$\lambda_2 - \lambda_3 = L(x_3 , x_2)$

$2 = 2$

هنا نبقي قيمة λ_2 السابقة كما هي وتساوي $\lambda_2 = 8$.

$i = 3 , j = 5$, $L(x_3 , x_5) = 7$

$\lambda_5 - \lambda_3 = 0 - 6 = -6$

$\lambda_5 - \lambda_3 < L(x_3 , x_5)$

$-6 < 7$

نعيد إذن حساب قيمة λ_5 حسب الصيغة التالية:

$\lambda_5 = \lambda_3 + L(x_3 , x_5)$

$\lambda_5 = 6 + 7 = 13$

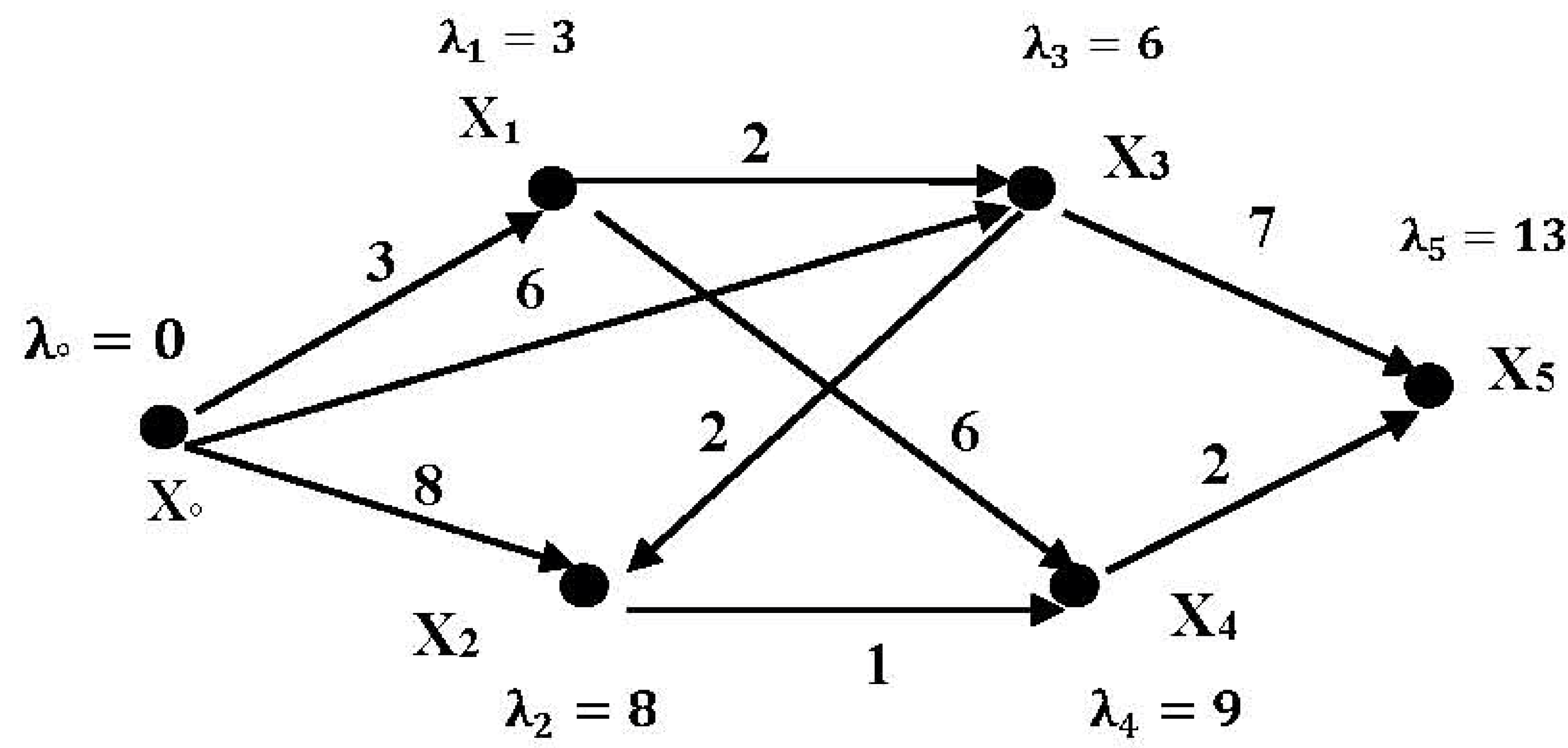
ننتقل إلى الرأس (X_4).

$i = 4 , j = 5$, $L(x_4 , x_5) = 2$

$\lambda_5 - \lambda_4 = 13 - 9 = 4$
$\lambda_5 - \lambda_4 > L(x_4, x_5)$
$4 > 2$

تبقي قيمة λ_5 السابقة كما هي وتساوي $\lambda_5 = 13$.

قمنا بحساب أطول المسارات بين النقطة **A** وكل نقطة من نقاط الشبكة السابقة، والتي تدل عليها قيم (λ_j) الجديدة. فكل قيمة ل (λ_j) تعني قيمة أطول مسار بين **A** والرأس(**j**). الشكل التالي يوضح هذه القيم:



من أجل تحديد المسار ذي **القيمة العظمى** الذي يبدأ من **X_0** وينتهي عند **X_5**، يكفي أن نحدد انطلاقا من نهاية الشبكة، الأسهم التي يكون الفرق بين قيم رؤوسها ($\lambda_j - \lambda_i$) وطول القيم المرفقة لها $L(X_i, X_j)$ متساويان.

$\lambda_5 - \lambda_3 = \mathbf{13 - 6 = 7} = L(x_3, X_5)$
$\lambda_3 - \lambda_0 = \mathbf{6 - 0 = 6} = L(x_0, X_3)$

إذن المسار ذو القيمة العظمى للتنقل من X_0 إلى X_5 هو: $\mathbf{X_5}$, $\mathbf{X_3}$, $\mathbf{X_0}$ بقيمة قصوى مقدارها **13**.

الفرع الثاني: طريقة R. BELLMAN.:

أولا: إيجاد المسار ذو القيمة العظمى.

لإيجاد المسار ذو القيمة العظمى في شبكة ما نتبع الخطوات التالية:

1- نرقم رؤوس الشبكة ترقيما تسلسليا معينا، مثلا: 1,.....,n

2- نضع على رؤوس الشبكة القيم ($\boldsymbol{\lambda_i}$).

3- نبدأ حساب قيم (λ_i) ابتداءا من الخلف (من نهاية الشبكة) كالتالي:

قيمة (λ_i) تساوي أعظم قيم (λ_j) الموجودة عند الرؤوس (x_j) التي تنتهي عندها الأسهم التي تنطلق من الرأس (x_i) مضافا إليها القيم المرافقة لهذه الأسهم.

أي: $\lambda_i = \left(\max_{j=1,...,n}\right) (\lambda_j + L_{ij})$

4- نعطي ل ($\boldsymbol{\lambda_n}$) القيمة صفر.

مثال: نأخذ معطيات نفس المثال السابق.

$\boldsymbol{\lambda_6} = 0$

$\lambda_5 = \left(\max_{j=6}\right) (\lambda_6 + L_{56}) = \mathbf{0 + 2 = 2}$

$\lambda_5 = 2$

$\lambda_4 = \left(\max_{j=3,6}\right) (\lambda_6 + L_{46} , \lambda_3 + L_{43})$

$= (\max) (0 + 7 , 3 + 2) = 7$

$\lambda_4 = 7$

$\lambda_3 = \left(\max_{j=5}\right) (\lambda_5 + L_{35})$

$= 2 + 1 = 3$

$\lambda_3 = 3$

$\lambda_2 = \left(\max_{j=4,5}\right) (\lambda_4 + L_{24}, \lambda_5 + L_{25})$

$= (\max)(7+2, 2+6) = 9$

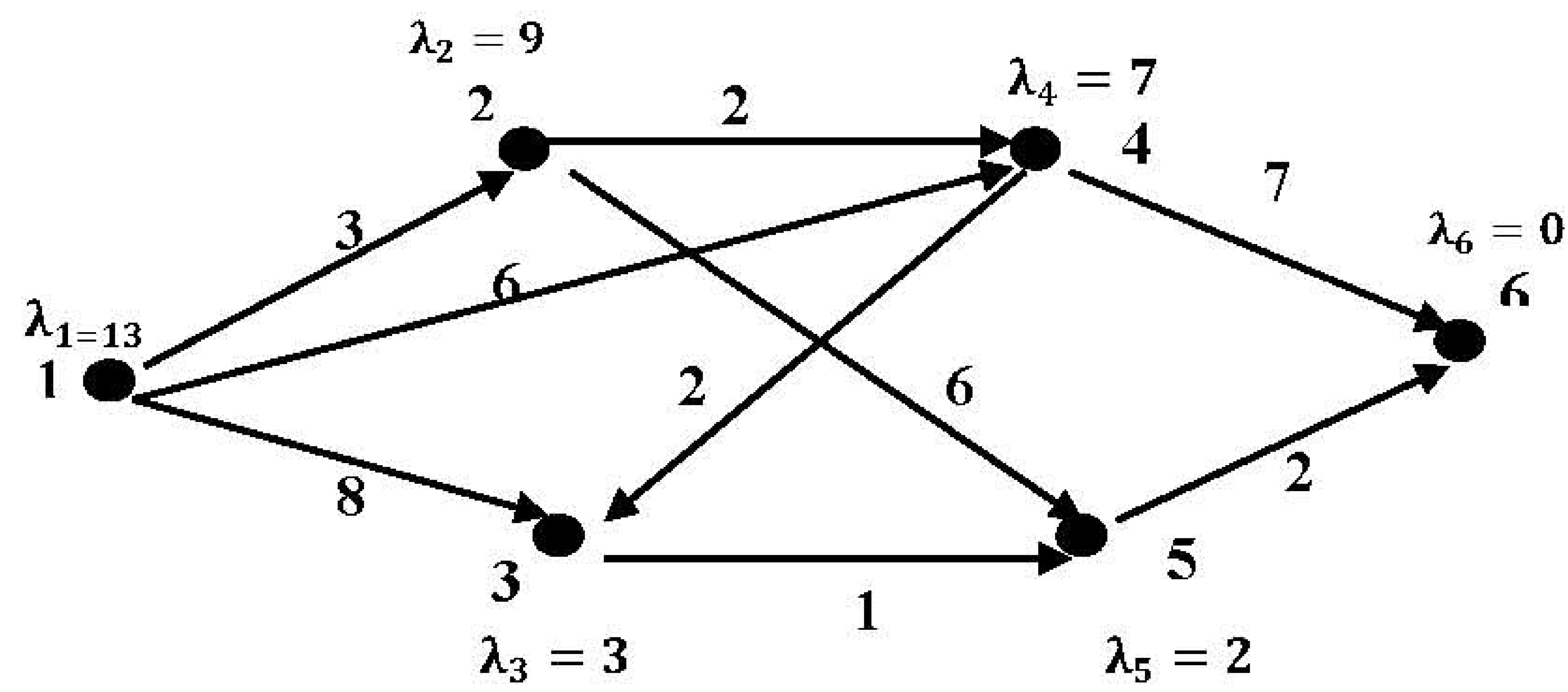
$\lambda_2 = 9$

$\lambda_1 = \left(\max_{j=2,3,4}\right) (\lambda_4 + L_{14}, \lambda_3 + L_{13}, \lambda_2 + L_{12})$

$= (\max)(7+6, 3+8, 9+3) = 13$

$\lambda_1 = 13$

تصبح قيم (λ_i) ممثلة لقيم أطول المسارات من الرأس (6) إلى الرؤوس الأخرى، وهي موضحة على الشبكة التالية:



ثانيا: إيجاد المسار ذو القيمة الدنيا.

من أجل تحديد المسار ذو القيمة الدنيا نتبع نفس الخطوات كما في حالة التعظيم مع الفارق المتمثل في أخذ **القيم الدنيا** (**min**) لنتيجة الحساب.

$\lambda_i = \left(\min_{j=1,..,n}\right) (\lambda_j + L_{ij})$

بالتطبيق على معطيات المثال السابق، نحصل على النتائج التالية:

$\boldsymbol{\lambda_6} = 0$

$\lambda_5 = \left(\min_{j=6}\right) (\lambda_6 + L_{56}) = \mathbf{0 + 2 = 2}$

$\lambda_5 = 2$

$\lambda_4 = \left(\min_{j=3,6}\right) (\lambda_6 + L_{46} , \lambda_3 + L_{43})$

$= (\min) (0 + 7 , 3 + 2) = 5$

$\lambda_4 = 5$

$\lambda_3 = \left(\min_{j=5}\right) (\lambda_5 + L_{35})$

$= 2 + 1 = 3$

$\lambda_3 = 3$

$\lambda_2 = \left(\min_{j=4,5}\right) (\lambda_4 + L_{24} , \lambda_5 + L_{25})$

$=(\min) (5 + 2 , 2 + 6) = 7$

$\lambda_2 = 7$

$\lambda_1 = \left(\min_{j=2,3,4}\right) (\lambda_4 + L_{14} , \lambda_3 + L_{13}, \lambda_2 + L_{12})$

$= (\min) (7 + 3 , 3 + 8 , 5 + 6) = 10$

$\lambda_1 = 10$

تصبح قيم (λ_i) تمثل قيم أقصر المسارات من الرأس (6) إلى الرؤوس الأخرى.

أقصر مسار من الرأس (1) إلى الرأس (6) هو: 1-2-4-3-5-5 بقيمة دنيا تساوي 10.

الفرع الثالث: طريقة G. DANTZIG.:

أولا: إيجاد المسار ذو القيمة العظمى.

لإيجاد المسار ذو القيمة العظمى في شبكة ما نتبع الخطوات التالية:

1- نرقم رؤوس الشبكة ترقيما تسلسليا معينا، مثلا: $1,\ldots,n$

2- نضع على رؤوس الشبكة القيم $(\boldsymbol{\lambda_i})$.

3- نبدأ حساب قيم (λ_j) ابتداء من الأمام (من بداية الشبكة) كالتالي:

قيمة (λ_j) تساوي أعظم قيم (λ_i) الموجودة عند الرؤوس (x_i) التي تنطلق منها الأسهم التي تصب في الرأس (x_j) مضافا إليها القيم المرافقة لهذه الأسهم.

أي: $\lambda_j = \left(\underset{i=1,\ldots,n}{\max}\right)(\lambda_i + L_{ij})$

بالتطبيق على معطيات المثال السابق، نحصل على النتائج التالية:

$\boldsymbol{\lambda_\circ} = 0$

$\lambda_1 = \left(\underset{i=0}{\max}\right)(\lambda_\circ + L_{01}) = \mathbf{0 + 3 = 3}$

$\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = \left(\underset{i=0,3}{\max}\right)(\lambda_\circ + L_{02}, \lambda_3 + L_{32})$

$= (\max)(0 + 8, 6 + 2) = 8$

$\lambda_2 = 8$

$\lambda_3 = \left(\underset{i=0,1}{\max}\right)(\lambda_\circ + L_{03} + \lambda_1 + L_{13})$

$= (\max)(0 + 6 + 3 + 2) = 6$

$\lambda_3 = 6$

$\lambda_4 = \binom{\max}{i=1,2} (\lambda_1 + L_{14}, \lambda_2 + L_{24})$

$= (\max) \quad (3+6, 8+1) = 9$

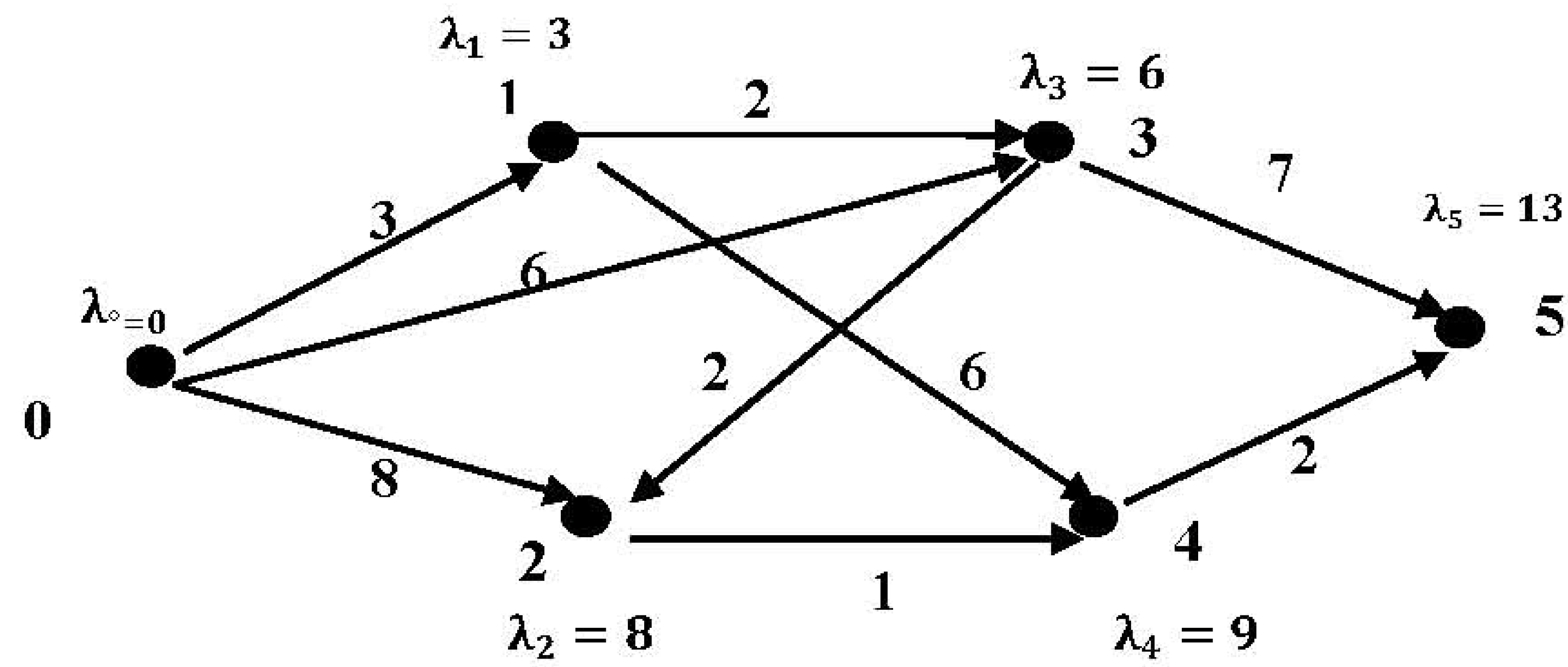
$\lambda_4 = 9$

$\lambda_5 = \binom{\max}{i=3,4} (\lambda_4 + L_{45}, \lambda_3 + L_{35})$

$= (\max) \quad (9+2, 6+7) = 10$

$\lambda_5 = 13$

تصبح قيم (λ_i) المحصل عليها تمثل قيم أطول المسارات من الرأس (0) إلى الرؤوس الأخرى، وهي موضحة على الشبكة التالية:



ثانيا: إيجاد المسار ذو القيمة الدنيا.

لإيجاد المسار ذو القيمة الدنيا في شبكة ما باستعمال طريقة **DANTZIG** نتبع نفس الخطوات كما في حالة التعظيم ما عدا معيار الأمثلية فيجب أخذه (**min**).

أي: $\lambda_j = \binom{\min}{i=1,\dots,n} (\lambda_i + L_{ij})$

بالتطبيق على معطيات المثال السابق، نحصل على النتائج التالية:

$\lambda_\circ = 0$

$\lambda_1 = \binom{\min}{i=0} (\lambda_\circ + L_{01}) = \mathbf{0 + 3 = 3}$

$\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = \binom{\min}{i=0,3} (\lambda_0 + L_{02} , \lambda_3 + L_{32})$

$= (\min) (0 + 8 , 5 + 2) = 7$

$\lambda_2 = 7$

$\lambda_3 = \binom{\min}{i=0,1} (\lambda_0 + L_{03} , \lambda_1 + L_{13})$

$= (\min) (0 + 6 , 3 + 2) = 5$

$\lambda_3 = 5$

$\lambda_4 = \binom{\min}{i=1,2} (\lambda_1 + L_{14} , \lambda_2 + L_{24})$

$= (\min) (3 + 6 , 7 + 1) = 8$

$\lambda_4 = 8$

$\lambda_5 = \binom{\min}{i=3,4} (\lambda_4 + L_{45} , \lambda_3 + L_{35})$

$=(\min) (5 + 7 , 8 + 2) = 10$

$\lambda_5 = 10$

تصبح قيم (λ_i) تمثل قيم أقصر المسارات من الرأس (0) إلى الرؤوس الأخرى.

الفرع الرابع: طريقة .FLOYD (طريقة المصفوفات)

أولا: إيجاد المسار ذو القيمة الدنيا.

هذه الطريقة تمكن من الحصول على المسارات ذات القيمة الدنيا بين **كل رأسين** من رؤوس الشبكة وليس فقط القيمة الدنيا للمسارات بين الرأس الابتدائي والرؤوس الأخرى.

خطوات الحل باستخدام هذه الطريقة تتمثل في ما يلي:

1- نرقم رؤوس الشبكة ترقيما متسلسلا معينا، مثلا من 1 إلى n.

2- نكون مصفوفة ذات n عمود و m صف، تحتوي على عناصر القيم المرافقة للشبكة L(U) .

3- الرأسين غير المرتبطين ببعضهما بسهم نضع قيمته المرافقة = ∞، أما القيمة المرافقة للسهم الذي يجمع الرأس بنفسه فقيمتها تساوي **الصفر**.

إذا رمزنا لمجموعة الأسهم بين الرؤوس بالرمز: $U(x_i,x_j)$ ورمزنا للقيم المرافقة لها بالرمز $L(X_i,X_j)$، فتكون عناصر المصفوفة M_{ij} محددة كالتالي:

$$M_{ij} = \begin{cases} L(X_i,X_j) \ , & \overrightarrow{X_i,X_j} \ \in U \\ \infty \ , & \overrightarrow{X_i,X_j} \ \notin U \\ 0 \ , & \overrightarrow{X_i,X_i} \end{cases}$$

أ- الحل الابتدائي:

الحل الابتدائي هو عبارة عن قيم المصفوفة الابتدائية (ذات العناصر الأولى للشبكة)، ونرمز له بالرمز (D_0).

ب- الحل الأمثل:

بالاعتماد على قيم عناصر الحل الابتدائي، نجري محاولات لتحسين الحل، بمعنى نبحث عن المسارات ذات القيم الدنيا، بحيث نرقم المحاولات بالرقم (D_i).

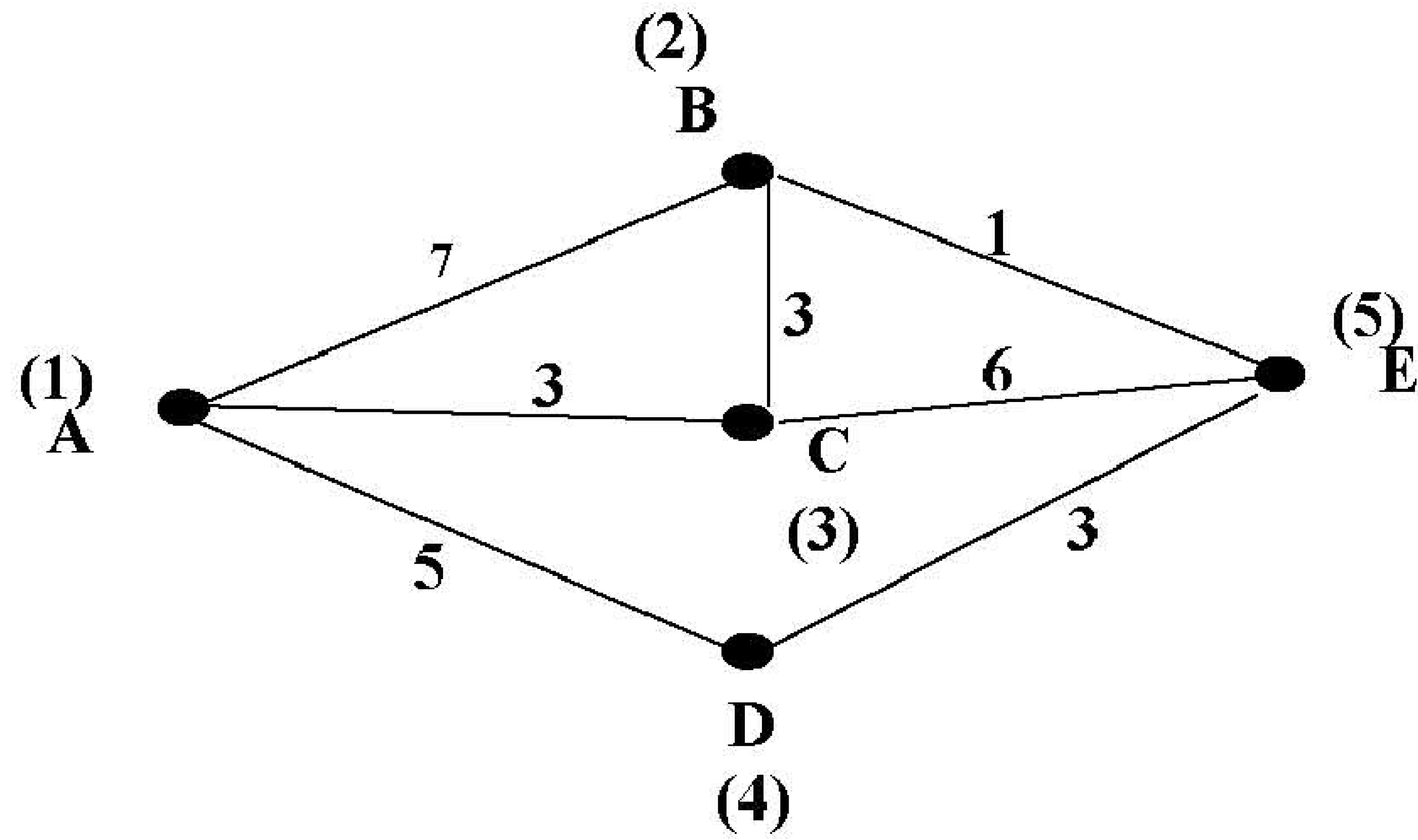
قيم عناصر المصفوفة المحصل عليها بعد كل محاولة (D_i) يمكن حسابها باستعمال العلاقة التالية:

$$M_{ij} = \min\{L(X_i, X_j) \ , \ L_{iD_i} + L_{D_ij}\}$$

ثم نحسب العداد K، حيث: $K= D_i +1$، و D_i هي رقم المحاولة. إذا كانت قيمة K تساوي (**n + 1**) فهذا مؤشر الوصول إلى حل أمثل، الذي يعني تحديد المسارات ذات القيم الدنيا التي تربط بين أي رأسين.

مثال1:

لتكن الشبكة الممثلة بالمخطط التالي (مع الإشارة إلى أن هذه الشبكة هي شبكة غير موجهة والسير فيها هو في الاتجاهين):



المطلوب:

تحديد قيم المسارات الدنيا بين كل رأسين من رؤوس الشبكة المعطاة.

الحل:

الحل الابتدائي D_0: يتمثل هذا الحل في مصفوفة القيم المباشرة أو الأولية للشبكة وهي:

	A(1)	B(2)	C(3)	D(4)	E(5)
A(1)	0	7	3	5	∞
B(2)	7	0	3	∞	1
C(3)	3	3	0	∞	6
D(4)	5	∞	∞	0	3
E(5)	∞	1	6	3	0

المحاولة الأولى (D_1) :

تتمثل خطوات المحاولة الأولى في إيجاد عناصر المصفوفة D_1 باستعمال الصيغة المشار إليها سابقا.

عناصر الصف الأول:

$M_{11} = \min\{L_{11}\ ,\ L_{11} + L_{11}\} = \min\{0\ ,\ 0+0\} = 0$

$M_{12} = \min\{L_{12}\ ,\ L_{11} + L_{12}\} = \min\{7\ ,\ 0+7\} = 7$

$M_{13} = \min\{L_{13}\ ,\ L_{11} + L_{13}\} = \min\{3\ ,\ 0+3\} = 3$

$M_{14} = \min\{L_{14}\ ,\ L_{11} + L_{14}\} = \min\{5\ ,\ 0+5\} = 5$

$M_{15} = \min\{L_{15}\ ,\ L_{11} + L_{15}\} = \min\{\infty\ ,\ 0+\infty\} = \infty$

عناصر الصف الثاني:

$M_{21} = \min\{L_{21}\ ,\ L_{21} + L_{11}\} = \min\{7\ ,\ 7+0\} = 7$

$M_{22} = \min\{L_{22}\ ,\ L_{21} + L_{12}\} = \min\{0\ ,\ 7+7\} = 0$

$M_{23} = \min\{L_{23}\ ,\ L_{21} + L_{13}\} = \min\{3\ ,\ 7+3\} = 3$

$M_{24} = \min\{L_{24}\ ,\ L_{21} + L_{14}\} = \min\{\infty\ ,\ 7+5\} = 12$

$M_{25} = \min\{L_{25}\ ,\ L_{21} + L_{15}\} = \min\{1\ ,\ 7+\infty\} = 1$

وهكذا نحسب عناصر الصفوف الثلاثة الأخرى، فنحصل على (D_1):

	A(1)	B(2)	C(3)	D(4)	E(5)
A(1)	0	7	3	5	∞
B(2)	7	0	3	12	1
C(3)	3	3	0	8	6
D(4)	5	12	8	0	3
E(5)	∞	1	6	3	0

نجري الآن اختبار الأمثلية بواسطة العداد K: هل K يساوي **n+1** أم لا ؟

K = 1+1 = 2، وهي قيمة لا تساوي **n + 1** (**6 = 5+ 1**)، فهذه المحاولة لا تشكل حلا أمثلا ويجب مواصلة الحل.

المحاولة الثانية (D_2) :

عناصر الصف الأول:

M_{11}= **min** $\{L_{11}\ ,\ L_{12} + L_{21}\}$ = **min** $\{0\ ,\ 7 + 7\}$ = **0**

M_{12}= **min** $\{L_{12}\ ,\ L_{12} + L_{22}\}$ = **min** $\{7\ ,\ 7 + 0\}$ = **7**

M_{13}= **min** $\{L_{13}\ ,\ L_{12} + L_{23}\}$ = **min** $\{3\ ,\ 7 + 3\}$ = **3**

M_{14}= **min** $\{L_{14}\ ,\ L_{12} + L_{24}\}$ = **min** $\{5\ ,\ 7 + 12\}$ = **5**

M_{15}= **min** $\{L_{15}\ ,\ L_{12} + L_{25}\}$ = **min** $\{\infty\ ,\ 7 + 1\}$ = **8**

عناصر الصف الثاني:

M_{21}= **min** $\{L_{21}\ ,\ L_{22} + L_{21}\}$ = **min** $\{7\ ,\ 0 + 7\}$ = **7**

M_{22}= **min** $\{L_{22}\ ,\ L_{22} + L_{22}\}$ = **min** $\{0\ ,\ 0 + 0\}$ = **0**

M_{23}= **min** $\{L_{23}\ ,\ L_{22} + L_{23}\}$ = **min** $\{3\ ,\ 0 + 3\}$ = **3**

M_{24}= **min** $\{L_{24}\ ,\ L_{22} + L_{24}\}$ = **min** $\{12\ ,\ 0 + 12\}$ = **12**

M_{25}= **min** $\{L_{25}\ ,\ L_{22} + L_{25}\}$ = **min** $\{1\ ,\ 0 + 1\}$ = **1**

وهكذا نحسب عناصر الصفوف الثلاثة الأخرى المتبقية، فنحصل على مصفوفة القيم الناتجة عن نتيجة المحاولة الثانية D_2:

	A(1)	B(2)	C(3)	D(4)	E(5)
A(1)	0	7	3	5	8
B(2)	7	0	3	12	1
C(3)	3	3	0	8	4
D(4)	5	12	8	0	3
E(5)	8	1	4	3	0

K = 1+2 = 3، هذه المحاولة بدورها لا تشكل هي أيضا حلا أمثلا ويجب مواصلة الحل.

المحاولة الثالثة (D_3) :

عناصر الصف الأول:

M_{11}= min $\{L_{11}\ ,\ L_{13} + L_{31}\}$ = min $\{0\ ,\ 3+7\}$ = 0
M_{12}= min $\{L_{12}\ ,\ L_{13} + L_{32}\}$ = min $\{7\ ,\ 3+3\}$ = 6
M_{13}= min $\{L_{13}\ ,\ L_{13} + L_{33}\}$ = min $\{3\ ,\ 3+0\}$ = 3
M_{14}= min $\{L_{14}\ ,\ L_{13} + L_{34}\}$ = min $\{5\ ,\ 3+8\}$ = 5
M_{15}= min $\{L_{15}\ ,\ L_{13} + L_{35}\}$ = min $\{8\ ,\ 3+4\}$ = 7

عناصر الصف الثاني:

M_{21}= min $\{L_{21}\ ,\ L_{23} + L_{31}\}$ = min $\{7,\ 3+3\}$ = 6
M_{22}= min $\{L_{22}\ ,\ L_{23} + L_{32}\}$ = min $\{0,\ 3+3\}$ = 0
M_{23}= min $\{L_{23}\ ,\ L_{23} + L_{33}\}$ = min $\{3,\ 3+0\}$ = 3
M_{24}= min $\{L_{24}\ ,\ L_{23} + L_{34}\}$ = min $\{12,\ 3+8\}$ = 11
M_{25}= min $\{L_{25}\ ,\ L_{23} + L_{35}\}$ = min $\{1,\ 3+4\}$ = 1

وهكذا نحسب عناصر الصفوف الثلاثة الأخرى المتبقية، فنحصل على مصفوفة القيم الناتجة عن نتيجة المحاولة الثالثة D_3:

	A(1)	B(2)	C(3)	D(4)	E(5)
A(1)	0	6	3	5	7
B(2)	6	0	3	11	1
C(3)	3	3	0	8	4
D(4)	5	11	8	0	3
E(5)	7	1	4	3	0

$4 = 1+3 = K$، و $K \neq n+1$ ، **فهذه** المحاولة لا تشكل حلا أمثلا ويجب مواصلة الحل.

المحاولة الرابعة (D_4) :

عناصر مصفوفة القيم الناشئة عن هذه المحاولة هي:

	A(1)	B(2)	C(3)	D(4)	E(5)
A(1)	0	6	3	5	7
B(2)	6	0	3	11	1
C(3)	3	3	0	8	4
D(4)	5	11	8	0	3
E(5)	7	1	4	3	0

$5 = 1+4 = K$، و $6 \neq K$ ، هذه المحاولة هي أيضا لا تشكل حلا أمثلا ويجب مواصلة الحل.

المحاولة الخامسة (D_5) :

عناصر مصفوفة القيم المتحصل عليها بعد هذه المحاولة هي:

	A(1)	B(2)	C(3)	D(4)	E(5)
A(1)	0	6	3	5	7
B(2)	6	0	3	4	1
C(3)	3	3	0	7	4
D(4)	5	4	7	0	3
E(5)	7	1	4	3	0

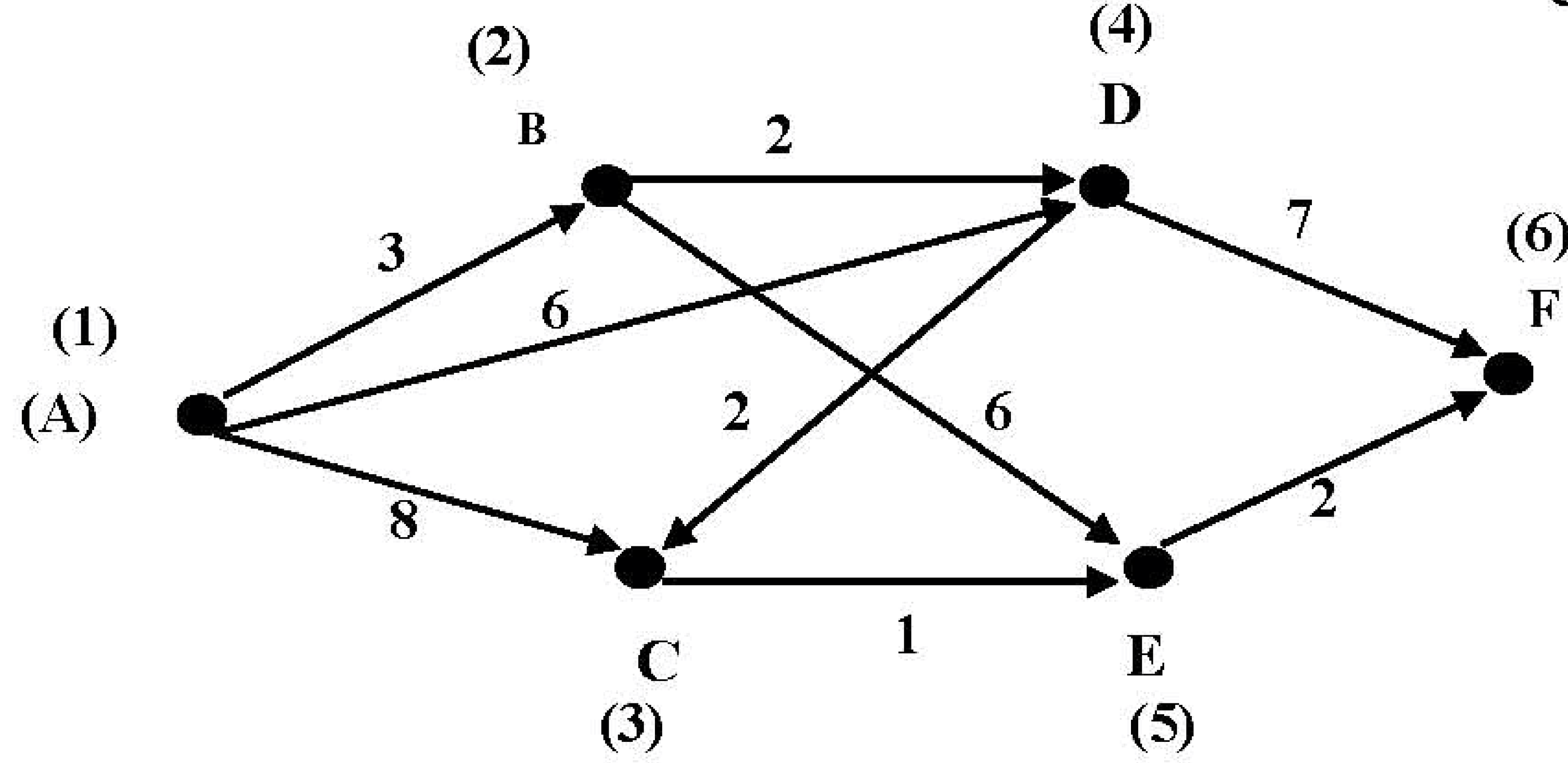
K=1+ 5 = 6، هذه المحاولة تشكل حلا أمثلا نظرا لأن **K= n + 1 = 6**.

ماذا يعني هذا الحل الأمثل المتحصل عليه؟

إن القيم الموجودة في جدول هذه المحاولة تمثل القيم الدنيا لكل المسارات بين أي رأسين في الشبكة السابقة، وليس فقط المسار ذو القيمة الدنيا بين الرأس الابتدائي (**A**) وأي رأس آخر. فمثلا القيمة المقابلة ل (CD) في الجدول وهي تساوي7، تعني أن قيمة أقصر مسار بين الرأسين C و D تساوي 7، أما بين E و C فقيمة أقصر مسار بينهما فتساوي **4** وهكذا بالنسبة لبقية القيم التي تعني قيم أقصر المسارات بين أي رأسين في الشبكة السابقة.

مثال2:

نرجع إلى شبكة المثال الأول المشار إليه سابقا، والممثلة بالشبكة التالية:



المطلوب استخراج قيم المسارات الدنيا التي تجمع كل رأسين من هذه الشبكة (مع الإشارة إلى أن هذه الشبكة هي شبكة موجهة والسير فيها هو باتجاه الأسهم فقط).

الحل:

الحل الابتدائي D₀: يتمثل هذا الحل في مصفوفة القيم المباشرة أو الأولية للشبكة وهي:

	A(1)	B(2)	C(3)	D(4)	E(5)	F(6)
A(1)	0	3	8	6	∞	∞
B(2)	∞	0	∞	2	6	∞
C(3)	∞	∞	0	∞	1	∞
D(4)	∞	∞	2	0	∞	7
E(5)	∞	∞	∞	∞	0	2
F(6)	∞	∞	∞	∞	∞	0

المحاولة الأولى:

نعمل الآن على إيجاد عناصر المصفوفة D_1 باستعمال الصيغة السابقة.

عناصر الصف الأول:

$M_{11}= \min\{L_{11}\ ,\ L_{11}+L_{11}\} = \min\{0\ ,\ 0+0\} = 0$

$M_{12}= \min\{L_{12}\ ,\ L_{11}+L_{12}\} = \min\{3\ ,\ 0+3\} = 3$

$M_{13}= \min\{L_{13}\ ,\ L_{11}+L_{13}\} = \min\{8\ ,\ 0+8\} = 8$

$M_{14}= \min\{L_{14}\ ,\ L_{11}+L_{14}\} = \min\{6\ ,\ 0+6\} = 6$

$M_{15}= \min\{L_{15}\ ,\ L_{11}+L_{15}\} = \min\{\infty\ ,\ 0+\infty\} = \infty$

$M_{16}= \min\{L_{16}\ ,\ L_{11}+L_{16}\} = \min\{\infty\ ,\ 0+\infty\} = \infty$

عناصر الصف الثاني:

$M_{21}= \min\{L_{21}\ ,\ L_{21}+L_{11}\} = \min\{\infty,\ \infty+0\} = \infty$

$M_{22}= \min\{L_{22}\ ,\ L_{21}+L_{12}\} = \min\{0,\ \infty+3\} = 0$

$M_{23}= \min\{L_{23}\ ,\ L_{21}+L_{13}\} = \min\{\infty,\ \infty+8\} = \infty$

$M_{24}= \min\{L_{24}\ ,\ L_{21}+L_{14}\} = \min\{2\ ,\ \infty+6\} = 2$

$M_{25}= \min\{L_{25}\ ,\ L_{21}+L_{15}\} = \min\{6\ ,\ \infty+\infty\} = 6$

$M_{26}= \min\{L_{26}\ ,\ L_{21}+L_{16}\} = \min\{\infty\ ,\ \infty+\infty\} = \infty$

وهكذا نحسب عناصر الصفوف الثلاثة الأخرى، فنحصل على مصفوفة القيم الناتجة عن المحاولة الأولى D_1:

	A(1)	B(2)	C(3)	D(4)	E(5)	F(6)
A(1)	0	3	8	6	∞	∞
B(2)	∞	0	∞	2	6	∞
C(3)	∞	∞	0	∞	1	∞
D(4)	∞	∞	2	0	∞	7
E(5)	∞	∞	∞	∞	0	2
F(6)	∞	∞	∞	∞	∞	0

K = 1+1 = 2، هذه المحاولة لا تشكل حلا أمثلا ويجب مواصلة الحل.

المحاولة الثانية:

مصفوفة القيم الناتجة عن المحاولة الثانية D_2 هي:

	A(1)	B(2)	C(3)	D(4)	E(5)	F(6)
A(1)	0	3	8	5	9	∞
B(2)	∞	0	∞	2	6	∞
C(3)	∞	∞	0	∞	1	∞
D(4)	∞	∞	2	0	∞	7
E(5)	∞	∞	∞	∞	0	2
F(6)	∞	∞	∞	∞	∞	0

K = 2+ 1= 3، لم نصل إلى الحل الأمثل ويجب مواصلة الحل.

المحاولة الثالثة:

مصفوفة قيم المحاولة الثالثة D_3 هي:

	A(1)	B(2)	C(3)	D(4)	E(5)	F(6)
A(1)	0	3	8	5	9	∞
B(2)	∞	0	∞	2	6	∞
C(3)	∞	∞	0	∞	1	∞
D(4)	∞	∞	2	0	3	7
E(5)	∞	∞	∞	∞	0	2
F(6)	∞	∞	∞	∞	∞	0

K = 3+1 = 4، هذه المحاولة لا تشكل حلا أمثلا ويجب مواصلة الحل.

المحاولة الرابعة:

مصفوفة قيم المحاولة الرابعة D_4 هي:

	A(1)	B(2)	C(3)	D(4)	E(5)	F(6)
A(1)	0	3	7	5	8	12
B(2)	∞	0	4	2	5	9
C(3)	∞	∞	0	∞	1	∞
D(4)	∞	∞	2	0	3	7
E(5)	∞	∞	∞	∞	0	2
F(6)	∞	∞	∞	∞	∞	0

K = 4+ 1 = 5، لم نصل إلى الحل الأمثل ويجب مواصلة الحل.

المحاولة الخامسة:

مصفوفة قيم المحاولة الخامسة D_5 هي:

	A(1)	B(2)	C(3)	D(4)	E(5)	F(6)
A(1)	0	3	7	5	8	10
B(2)	∞	0	4	2	5	7
C(3)	∞	∞	0	∞	1	3
D(4)	∞	∞	2	0	3	5
E(5)	∞	∞	∞	∞	0	2
F(6)	∞	∞	∞	∞	∞	0

K = 5+ 1= 6، هذه المحاولة لا تعطي الحل الأمثل ويجب مواصلة الحل.

المحاولة السادسة:

مصفوفة قيم المحاولة السادسة D_6 هي:

	A(1)	B(2)	C(3)	D(4)	E(5)	F(6)
A(1)	0	3	7	5	8	10
B(2)	∞	0	4	2	5	7
C(3)	∞	∞	0	∞	1	3
D(4)	∞	∞	2	0	3	5
E(5)	∞	∞	∞	∞	0	2
F(6)	∞	∞	∞	∞	∞	0

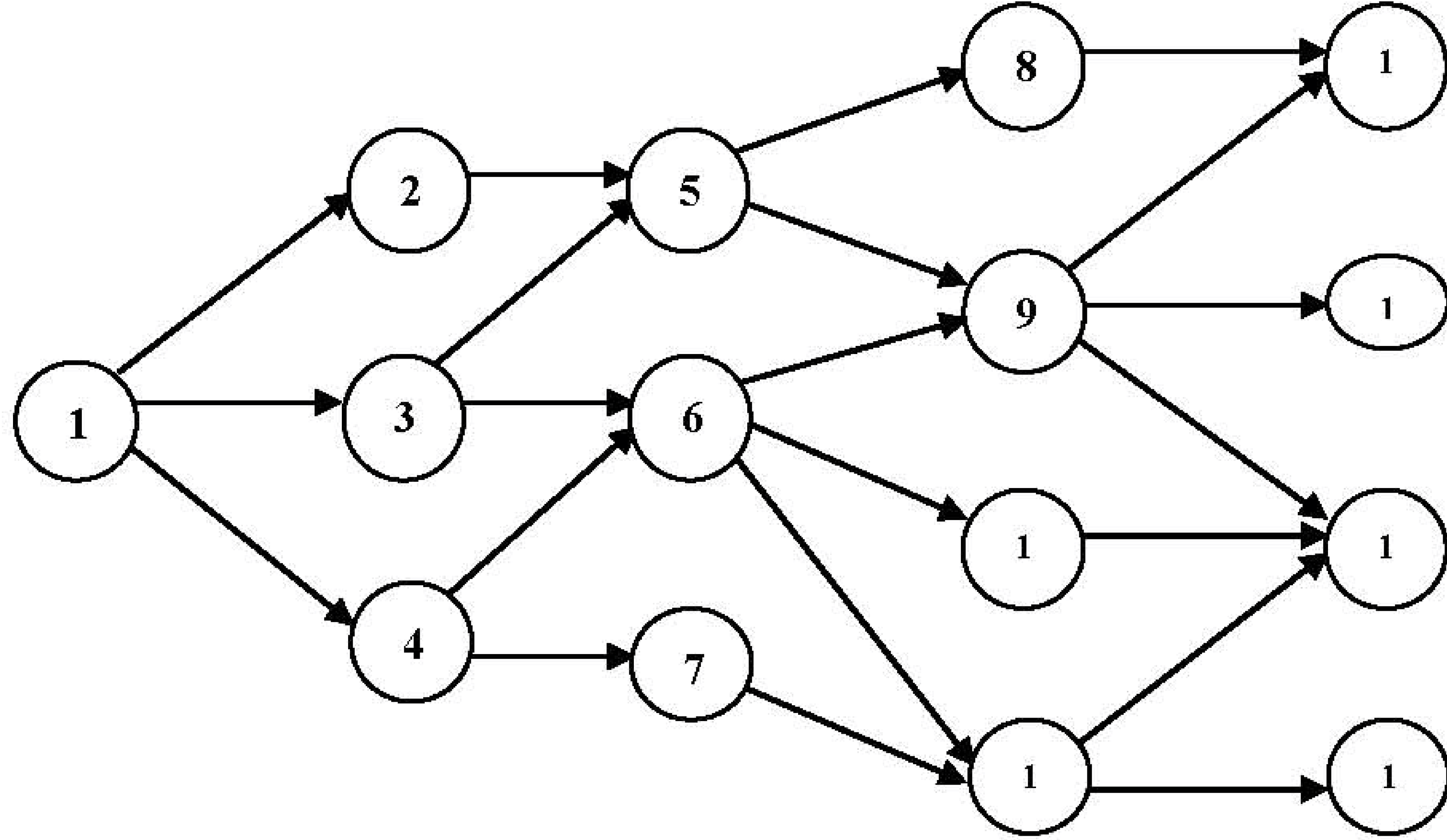
K=6 + 1 = 7، هذه المحاولة تشكل حلا أمثلا نظرا لأن **K=n + 1 = 7**.

هنا أيضا نلاحظ أن جدول المحاولة السادسة يعطينا القيم الدنيا للمسارات التي تجمع أي رأسين من رؤوس الشبكة السابقة.

تطبيقات عامة:

تطبيق1:

يريد أحد المزارعين، الذي يقطن في المدينة (1)، أن يسافر إلى أحد أسواق الجملة من أجل بيع منتجاته. هذه الأسواق تقع في المدن (12،13،14،15)، وتوجد هناك عدة مسارات تسمح للمزارع من التنقل من المدينة رقم (1) إلى المدن التي توجد فيها الأسواق كالتالي:



نظرا لأن المزارع على دراية بالأسعار السائدة في الأسواق فإنه يعرف نظريا رقم المبيعات المتوقع الذي يمكن أن يحققه في كل سوق من الأسواق الأربعة كالتالي:

السوق	12	13	14	15
رقم المبيعات المتوقع (ون)	550	580	590	600

كما يعرف أيضا التكاليف التي يتحملها أثناء السفر والتنقل بين كل مدينة وأخرى على كل المسارات المختلفة كالتالي:

المدن	2–1	3–1	4–1	5–2	5–3	6–3	6–4	7–4	8–5
مبلغ التكلفة	10	12	15	5	5	15	15	10	3

المدن	9–5	9–6	10–6	11–6	11–7	12–8	12–9	13–9	14–9
مبلغ التكلفة	10	10	5	20	20	4	4	5	20

المدن	14–10	14–11	15–11
مبلغ التكلفة (ون)	20	20	7

المطلوب: تحديد السوق التي يجب أن يتجه إليها المزارع والمسار الذي يجب أن يسلكه من أجل أن يتمكن من تعظيم رقم مبيعاته الصافي (استعمل طريقة **Bellman**).

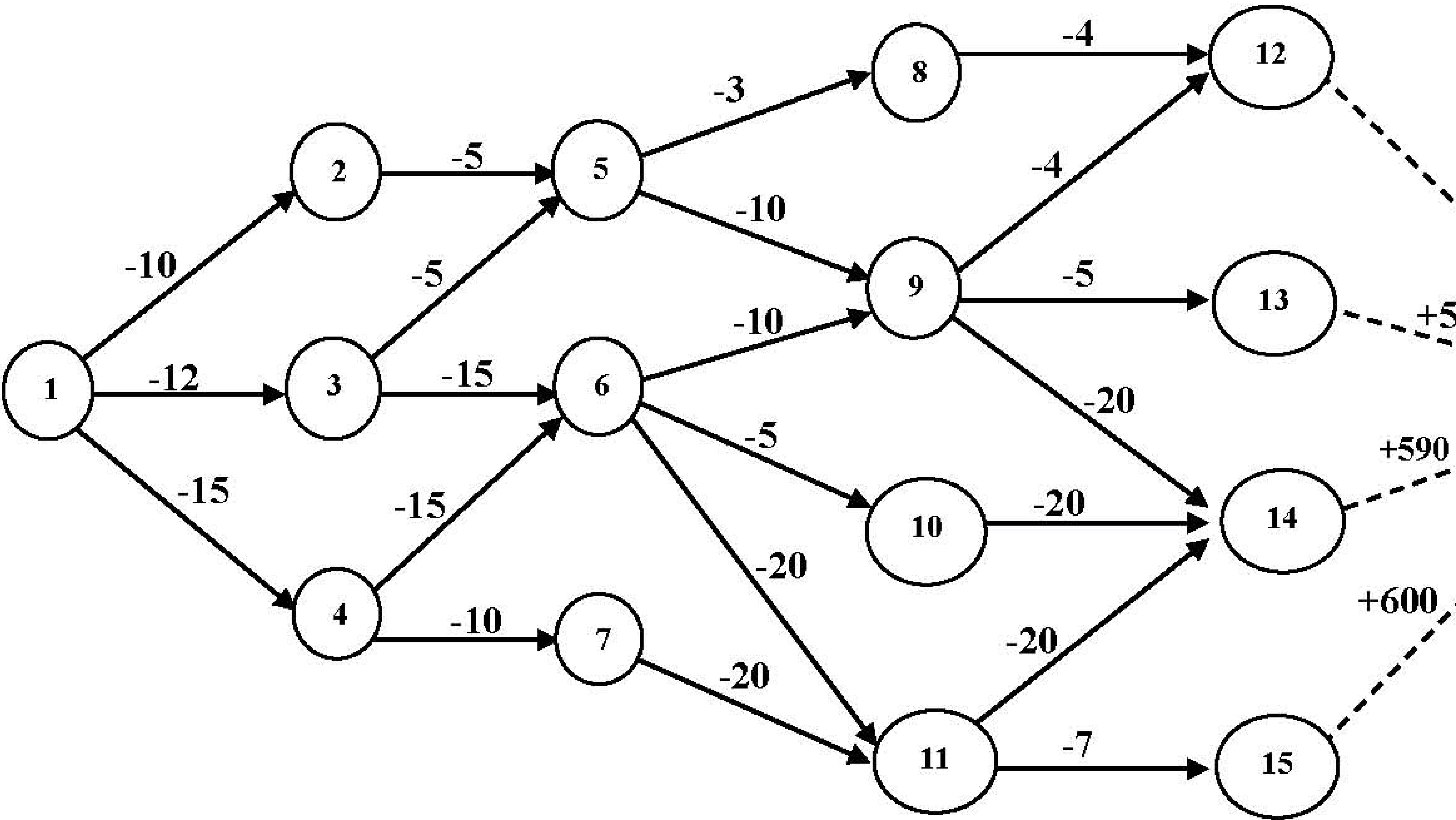
الحل:

الأسهم الموجودة في الشبكة السابقة تمثل الطرق المختلفة التي يمكن أن يتنقل من خلالها المزارع بين المدن المختلفة. على كل سهم تظهر تكلفة التنقل التي يتحملها هذا المزارع بين كل مدينة وأخرى.

على رؤوس المدن الموجودة فيها الأسواق نضع رقم المبيعات المتوقع الذي يمكن أن يتحصل عليه المزارع.

من أجل حساب الدخل الصافي الذي يتوقع المزارع الحصول عليه في كل مسار من المسارات، نقوم بطرح تكاليف التنقل التي يتحملها المزارع من رقم المبيعات، فنرمز لقيم التكاليف بالإشارة (−)، ورقم المبيعات بالإشارة (+) على أساس أن رقم الأعمال هو إيراد والتكاليف هي مصاريف. ثم نكمل الشبكة بإضافة نهاية وهمية برأس (16) وبأسهم تجمعها مع المدن الموجودة فيها هذه الأسواق، وعلى هذه الأسهم نكتب رقم المبيعات في هذه المدن.

نبحث الآن عن ذلك المسار الذي يجب أن يسلكه المزارع والذي يسمح له بتحقيق أكبر رقم مبيعات صافي.



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
-10
-12
-15
-5
-5
-15
-15
-10
-3
-10
-10
-5
-20
-20
-4
-4
-5
-20
-20
-20
-7
+590
+600

نضع على رؤوس الشبكة القيم (λ_i) بقيم مؤقتة تساوي صفر، ثم نعمل على حساب قيما جديدة لـ(λ_i) تمثل قيم المداخيل الصافية الممكن الحصول عليها في المسارات المختلفة.

ننطلق في هذه الحالة من نهاية الشبكة، ونضع $\lambda_{16} = 0$.

$\lambda_{15} = \binom{\max}{j=16} (\lambda_{16} + L_{15/16}) = 0 + 600 = 600$

$\lambda_{15} = 600$

$\lambda_{14} = \binom{\max}{j=16} (\lambda_{16} + L_{14/16})$

$= (\max) (0 + 590) = 590$

$\lambda_{14} = 590$

$\lambda_{13} = \binom{\max}{j=16} (\lambda_{16} + L_{13/16})$

$= (\max) (0 + 580) = 580$

$\lambda_{13} = 580$

$\lambda_{12} = \binom{\max}{j=16} (\lambda_{16} + L_{12/16})$

$= (\max) (0 + 550) = 550$

$\lambda_{12} = 550$

$\lambda_{11} = \binom{\max}{j=14,15} (\lambda_{14} + L_{11/14}, \lambda_{15} + L_{11/15})$

$= (\max) (590 - 20, 600 - 7) = 593$

$\lambda_{11} = 593$

$\lambda_{10} = \binom{\max}{j=14} (\lambda_{14} + L_{10/14})$

$= (\max) (590 - 20) = 570$

$\lambda_{11} = 570$

$\lambda_{9} = \binom{\max}{j=12,13,14} (\lambda_{12} + L_{9/12}, \lambda_{13} + L_{9/13}, , \lambda_{14} + L_{9/14})$

$= (\max) (550 - 4, 580 - 5, 590 - 20) = 575$

$\lambda_9 = 575$

$\lambda_8 = \left(\max_{j=12}\right) (\lambda_{12} + L_{8/12})$

$= (\max)\ (550 - 4) = 546$

$\lambda_8 = 546$

$\lambda_7 = \left(\max_{j=11}\right) (\lambda_{11} + L_{7/11})$

$= (\max)\ (593 - 20) = 573$

$\lambda_7 = 573$

$\lambda_6 = \left(\max_{j=9,10,11}\right) (\lambda_9 + L_{6/9}, \lambda_{10} + L_{6/10}, \lambda_{11} + L_{6/11})$

$= (\max)\ (575 - 10, 570 - 5, 593 - 20) = 573$

$\lambda_6 = 573$

$\lambda_5 = \left(\max_{j=8,9}\right) (\lambda_8 + L_{5/8}, \lambda_9 + L_{5/9})$

$= (\max)\ (496 - 3, 575 - 10) = 565$

$\lambda_5 = 565$

$\lambda_4 = \left(\max_{j=6,7}\right) (\lambda_6 + L_{4/6}, \lambda_7 + L_{4/7})$

$= (\max)\ (573 - 15, 573 - 10) = 563$

$\lambda_4 = 563$

$\lambda_3 = \left(\max_{j=5,6}\right) (\lambda_5 + L_{3/5}, \lambda_6 + L_{3/6})$

$= (\max)\ (565 - 5, 573 - 15) = 560$

$\lambda_3 = 560$

$\lambda_2 = \left(\max_{j=5}\right) (\lambda_5 + L_{2/5})$

$= (\max)\ (565 - 5) = 560$

$\lambda_2 = 560$

$\lambda_1 = \left(\max_{j=2,3,4}\right) (\lambda_2 + L_{1/2}, \lambda_3 + L_{1/3}, \lambda_4 + L_{1/4})$

$= (\max)\ (560 - 10, 560 - 12, 563 - 15) = 550$

$\lambda_1 = 550$

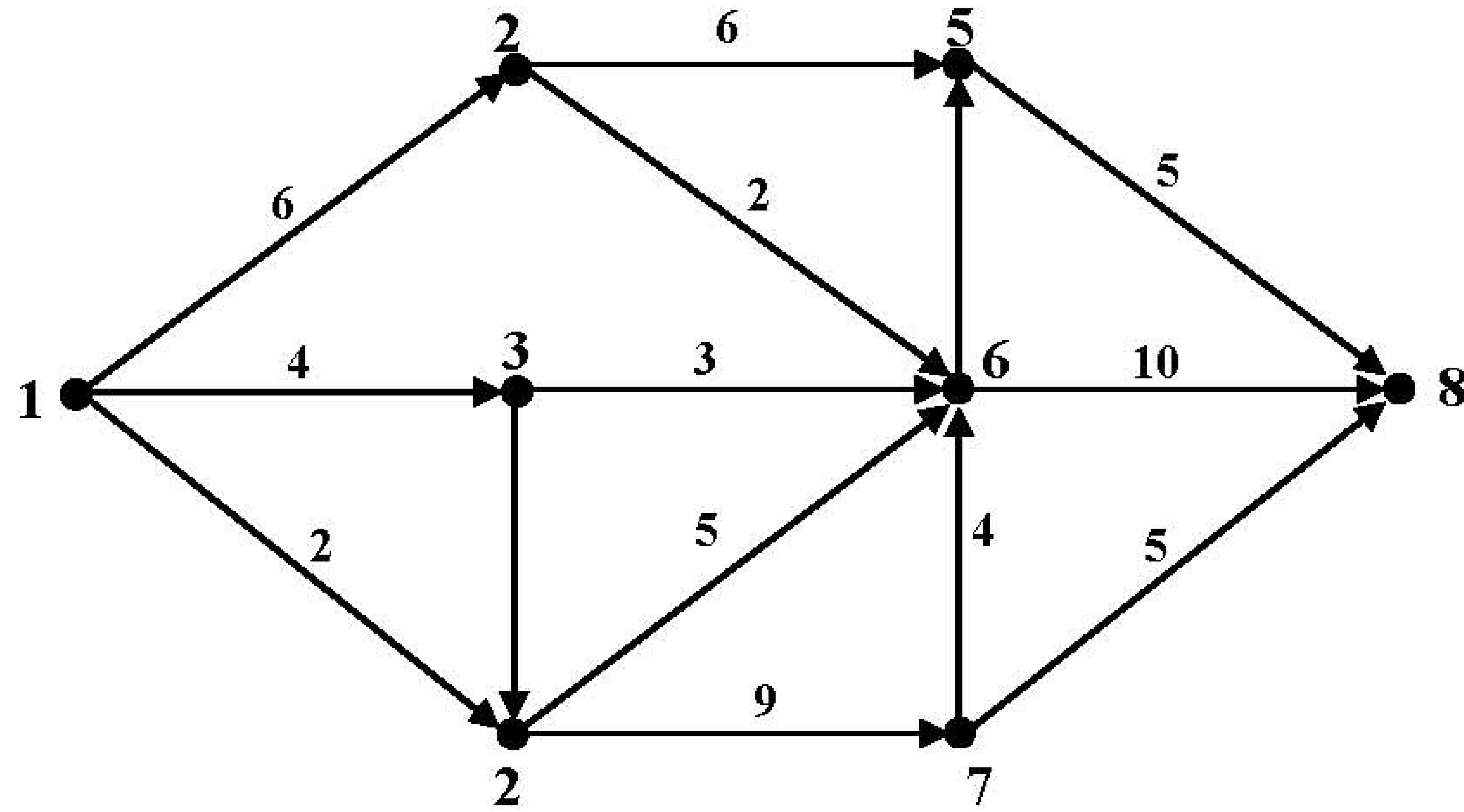
قيم (λ_i) الجديدة المحصل عليها تمثل قيم أطول المسارات من الرأس (1) إلى الرؤوس الأخرى.

أعظم دخل صافي يمكن أن يحققه المزارع يساوي **550** وحدة نقدية، وذلك باتخاذه المسار (**13–9–5–2–1**)، وهو المسار ذو القيمة العظمى من الرأس (**1**) إلى الرأس (**16**).

تطبيق2:

في ما يلي شبكة تنفيذ مشروع معين، المطلوب تحديد مسار التنفيذ ذو القيمة الدنيا في هذه الشبكة.

(استعمل طريقة **Dantzig**).



الحل:

نرقم رؤوس الشبكة من 1 إلى 8. نضع $\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{0}$

$\lambda_2 = \binom{\min}{i=1} (\lambda_1 + L_{12}) = \mathbf{0 + 6 = 6}$

$\lambda_2 = 6$

$\lambda_3 = \binom{\min}{i=1} (\lambda_1 + L_{13})$

$= \textbf{(min)}\ (0 + 4) = 4$

$\lambda_3 = 4$

$\lambda_4 = \left(\substack{\textbf{min} \\ \textbf{i=1,3}}\right) (\lambda_1 + L_{14} , \lambda_3 + L_{34})$

$= \textbf{(min)}\ (0 + 2 , 4 + 1) = 2$

$\lambda_4 = 2$

$\lambda_5 = \left(\substack{\textbf{min} \\ \textbf{i=2,6}}\right) (\lambda_2 + L_{25} , \lambda_6 + L_{65})$

$= \textbf{(min)}\ (6 + 6 , 7 + 5) = 12$

$\lambda_5 = 12$

$\lambda_6 = \left(\substack{\textbf{min} \\ \textbf{i=2,3,4,7}}\right) (\lambda_2 + L_{26} , \lambda_3 + L_{36} , \lambda_4 + L_{46} , \boldsymbol{\lambda_7} + \mathbf{L_{76}})$

$= \textbf{(min)}\ (6 + 2 , 4 + 3 , 2 + 5, \mathbf{7 + 4}) = 10$

$\lambda_6 = 7$

$\lambda_7 = \left(\substack{\textbf{min} \\ \textbf{i=4}}\right) (\lambda_4 + L_{47})$

$= (2 + 9) = 11$

$\lambda_7 = 7$

$\lambda_8 = \left(\substack{\textbf{min} \\ \textbf{i=5,6,7}}\right) (\lambda_5 + L_{58} , \lambda_6 + L_{68} , \lambda_7 + L_{78})$

$= \textbf{(min)}\ (12 + 5 , 7 + 10 , 11 + 5) = 16$

$\lambda_8 = 16$

$\lambda_8 = 16$ تمثل قيمة أقصر مسار خلال الشبكة السابقة، الذي يربط بين الرأس **(1)** والرأس **(8)**.

المبحث الثاني

البحث عن التدفق الأعضم عبر شبكة

نهتم في هذا المجال بدراسة شبكات مكونة من رؤوس تربطها أسهم، التي يتدفق (ينساب) من خلالها مقدار معين من الأشياء (منتجات، خدمات، أو غيرها) أو عدد معين من الأفراد. نضع فوق الأسهم مقادير توضح قدرات الانسياب (النقل) القصوى لكل سهم، وكل سهم يشكل جزءا من الشبكة يرمز إلى طريق من طرق النقل، قناة من قنوات التوزيع، أو ما شابهها.

الهدف الذي نريد أن نصل إليه من خلال حل هذه المسألة يتمثل بصفة عامة في البحث عن أعظم تدفق عبر الشبكة. بمعنى آخر نحاول إيصال أو نقل أعظم كمية من الكميات المتوفرة في مدخل الشبكة (عند الرأس X_0) وإيصالها إلى مخرج الشبكة (إلى الرأس X_n)، وذلك بالأخذ بعين الاعتبار قدرات الأسهم، أي سعة طرق أو قنوات النقل.

نشير إلى أن قدرات النقل يمكن أن تمثل سعة الشحن على البواخر، الشاحنات، القطارات وغيرها من وسائل نقل الأشياء أو الأفراد. أو تمثل سعة الانسياب في قنوات الماء، الغاز، صرف الفضلات، الاتصالات السلكية، وكل قنوات التوزيع.

البحث عن تدفق أعظم عبر شبكة ما يعني البحث عن تدفق يجعل الانسياب إلى رأسها النهائي (أو إلى مخرجها) أعظم ما يمكن. من أهم الطرق المستعملة في حل مثل هذا النوع من المسائل هي طريقة (**Ford–Fulkerson**)، ويمر الحل باستخدام هذه الطريقة عبر مرحلتين:

المرحلة الأولى

البحث عن تدفق كامل

(la recherche d'un flot complet) :

نستعمل في هذه المرحلة من الحل الرموز التالية:

C_{ij} – قدرة التدفق **النظرية**: وهي تمثل قدرة أو إمكانية التدفق أو النقل القصوى عبر السهم U_{ij} بحيث $(C_{ij} > 0)$.

φ_{ij} – قدرة التدفق **الفعلية**: وهي تعبر عن العدد أو الكمية المتدفقة فعلا عبر السهم U_{ij} بحيث $(\varphi_{ij} \geq 0)$.

φ – الكمية **الكلية** المتدفقة(المنقولة) فعلا عبر الشبكة وهي تساوي مجموع الكميات المنقولة أو المتدفقة فعلا عبر الأسهم: $\varphi = \sum \varphi_{ij}$

X_0 – الرأس الابتدائي والوحيد في الشبكة ويسمى بمدخل الشبكة.

Z – الرأس النهائي في الشبكة ويسمى بمخرج الشبكة.

P_{ij} – قدرة التدفق المتبقية في السهم U_{ij} بعد أن نكون قد نقلنا فيه فعلا كمية ما φ_{ij}، أي أن $(P_{ij} = C_{ij} - \varphi_{ij})$.

خطوات الحل:

1 – تحديد قدرة التدفق عبر السهم:

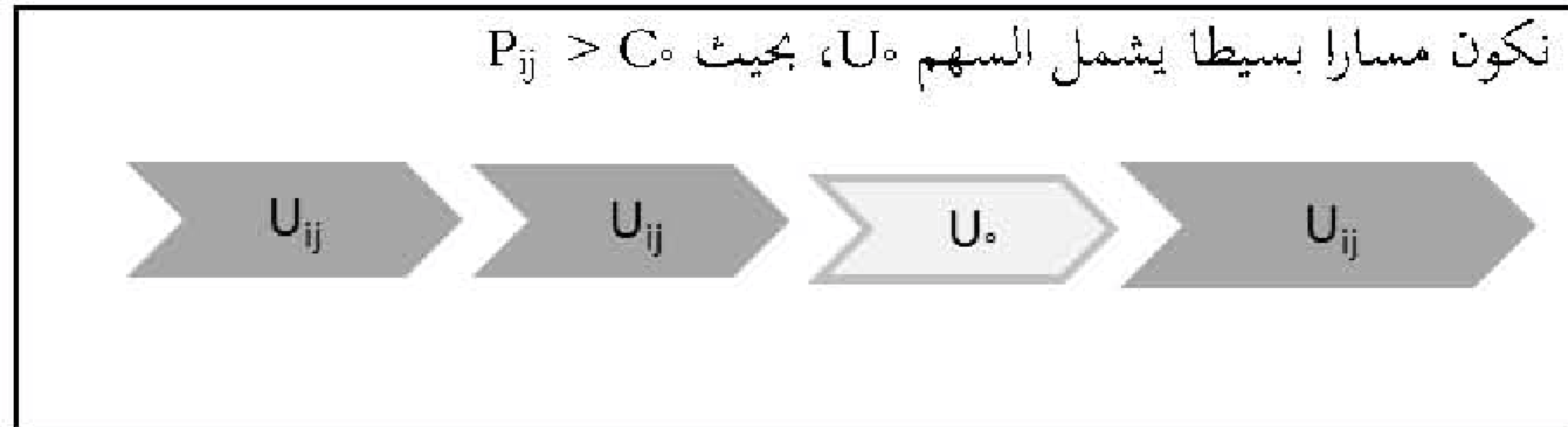
عندما تكون $(\varphi_{ij} = 0)$ **فإن** $(P_{ij} = C_{ij} - \varphi_{ij} = C_{ij})$، وعندها يكون السهم فارغ.

عندما تكون الكمية المتدفقة فعلا في السهم وهي φ_{ij} تعادل $(C_{ij} > \varphi_{ij} > 0)$، فإن الكمية المتبقية فيه تعادل: $(0 < P_{ij} < C_{ij})$.

عندما تكون $(\varphi_{ij} = C_{ij})$ فإن $(P_{ij} = 0)$، وعندئذ نقول أن السهم مشبع.

2 – نختار من بين قائمة الأسهم غير المشبعة وغير المغلقة، نختار السهم (**U∘**) ذو قدرة الانسياب (**C∘**) **الأصغر**.

3 – **أ** – نكون **مسار بسيط** (وهو المسار الذي يمر بكل سهم مرة واحدة) يمر أو يشمل السهم المختار (**U∘**)، هذا المسار يتكون من أسهم القدرة الاستيعابية المتبقية لكل واحد منها (**P_{ij}**) تكون على الأقل تساوي **C∘** وهي قدرة الاستيعاب للسهم (**U∘**). أي أن: $P_{ij} \geq C_\circ$.

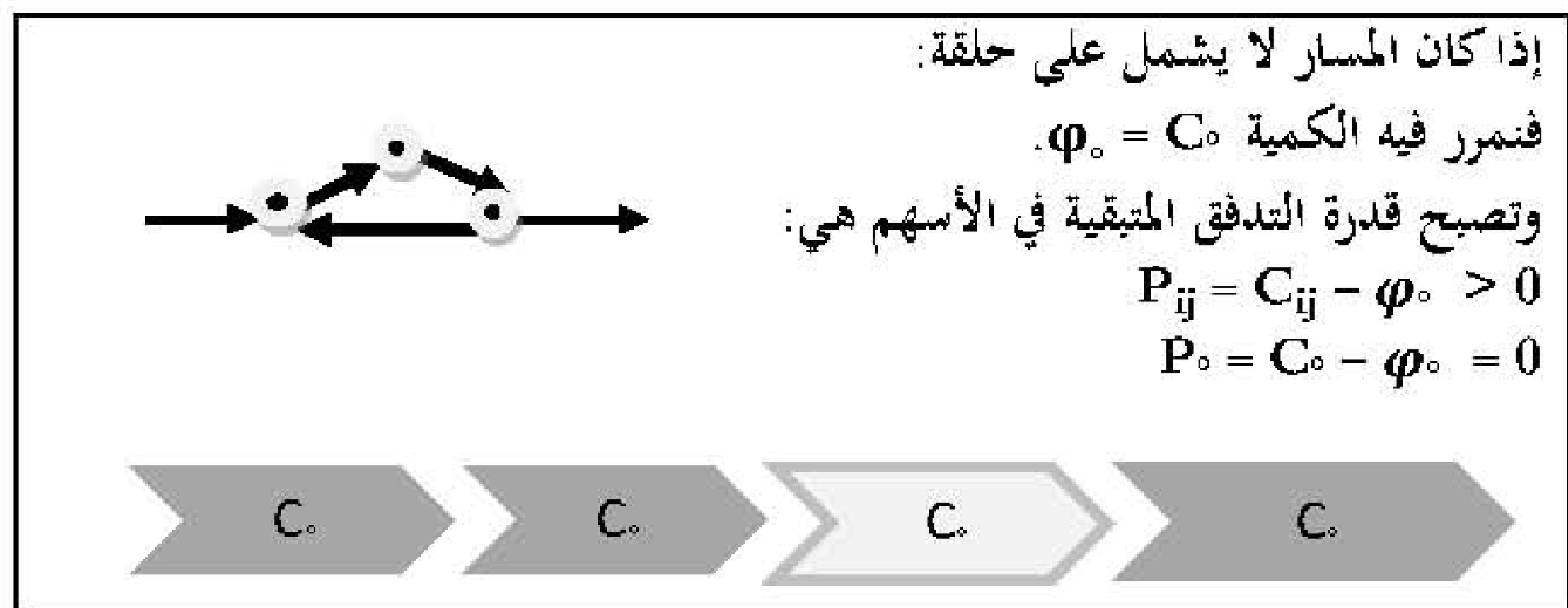


3 – **ب** – إذا كان هذا المسار لا يحتوي على حلقة، فنمرر فيه الكمية المنقولة ($\varphi_\circ = C_\circ$) في كل الأسهم المنتمية إليه، عندئذ تصبح الكمية المتبقية في أسهم هذا المسار هي:

$$P_{ij} = C_{ij} - \varphi_\circ > 0$$

أما السهم (**U∘**) نفسه، فإن الكمية المتبقية فيه هي:

$$P_{ij} = C_\circ - \varphi_\circ = 0$$



3– ت – بعد هذا نشطب هذا السهم المشبع (السهم **U°**) نظرا لأننا لا نستطيع زيادة النقل (التدفق) فيه، ثم نشطب أو نسد الأسهم التي تصب أو تتفرع من هذا السهم حسب الخطوة (**4**).

3 – ث – إذا كان المسار المختار يحتوي على حلقة، فيجب سد أو غلق، السهم ذو قدرة النقل (التدفق) الأصغر في الحلقة الموجودة في هذا المسار، ثم الرجوع إلى الخطوة (**2**).

4 – عند كل رأس ($\mathbf{X_i}$) من رؤوس المسار المختار، يجب اختبار إذا ما كان ضروريا سد أو غلق بعض الأسهم: بعد تحييد أو غلق السهم المشبع فإنه يجب توقيف أو سد بعض الأسهم وفق الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: كل الأسهم المنطلقة (المتفرعة) من رأس ما إذا كانت كل الأسهم التي تصب في ذلك الرأس كلها مشبعة أو متوقفة.

الحالة الثانية: كل الأسهم التي تصب في رأس ما إذا كانت الأسهم المنطلقة منه كلها مشبعة أو متوقفة.

الحالة الأولى		
الحالة الثانية		

بعد سد أو غلق بعض الأسهم نرجع إلى الخطوة رقم (**2**).

5 – عند أي رأس من رؤوس الشبكة ($\mathbf{X_i}$)، ما عدا الرأس الابتدائي (**X°**) والرأس النهائي (**Z**)، يجب أن يتحقق الشرط:

$$\begin{cases}\sum\boldsymbol{\varphi(U)} \\ \boldsymbol{U_{input}}\end{cases} = \begin{cases}\sum\boldsymbol{\varphi(U)} \\ \boldsymbol{U_{output}}\end{cases} ,\ \mathbf{X_i} \neq \mathbf{X^\circ},\ \ \mathbf{X_i} \neq \mathbf{Z}$$

هذا يعني أن الكميات المتدفقة في الأسهم السابقة لرأس ما ($\mathbf{X_i}$) يجب أن تكون أصغر أو تساوي الكميات المتدفقة عبر الأسهم التي تنطلق من ذلك

السهم، على أساس أن $\mathbf{U_{input}}$ تعني مجموع قيم الأسهم السابقة للرأس ($\mathbf{X_i}$) و $\mathbf{U_{output}}$ تعني مجموع قيم الأسهم التي تتفرع من الرأس ($\mathbf{X_i}$).

6 – نتوقف عن تطبيق خطوات هذه المرحلة (أي نتوقف عن البحث على تدفق كامل)، عندما يتحقق الشرطين التاليين:

– إذا كانت كل الأسهم المنطلقة من الرأس الابتدائي ($\mathbf{X_0}$) أو تكون تلك التي تصب في الرأس النهائي (**Z**) كلها مشبعة أو مسدودة.

– إذا كان أي مسار من مسارات الشبكة يحتوي على الأقل على سهم واحد مشبع (بمعنى ينقل كمية $\boldsymbol{\varphi_{ij}}$ مساوية تماما لطاقته النظرية $\mathbf{C_{ij}}$).

المرحلة الثانية: البحث عن تدفق أعظم:

(la recherche d'un flot maximal)

عند الحصول على تدفق كامل عبر الشبكة المدروسة، يجب البحث على إمكانية الحصول على تدفق أحسن منه يسم بالتدفق الأعظم. يتم ذلك عبر خطوات التعيين(**l'opération de marquage**):

1–تعيين بداية الشبكة (الرأس الابتدائي لها) بالعلامة (+) مثلا.

2– تعيين الطرف النهائي (**j**) لأي سهم غير مشبع ($\overrightarrow{\mathbf{i,j}}$) الذي يكون طرفه الابتدائي (**i**) معين، يتمثل هذا التعيين في وضع علامة (**+i**) أمام الطرف النهائي للسهم (**j**).

3– تعيين الطرف الابتدائي (**i**) لكل سهم ($\overrightarrow{\mathbf{i,j}}$) مستعمل أو مشبع، بمعنى الذي ينقل عبره كمية أكبر من الصفر، والذي يكون طرفه النهائي (**j**) معين، وذلك بوضع إشارة (**–j**) أمام (**i**).

4– نستمر في وضع هذه العلامات بهذا الشكل حتى نصل إلى نهاية الشبكة (أي إلى الرأس النهائي)، فإذا ما وصلنا إلى آخر رأس في الشبكة ووضعنا أمامه العلامة المشار إليها فهذا يعني أن التدفق الحالي غير أعظم.

في هذه الحالة نأخذ سلسلة من الرؤوس ذات العلامات أو الإشارات السابق الإشارة إليها، والتي تكوّن الأسهم التي تجمعها في ما بينها مسارا متصلا من بداية الشبكة وحتى نهايتها، ونحاول من خلاله تحسين التدفق وذلك بزيادة أو طرح كمية

ما عبر هذا المسار وذلك حسب اتجاه السهم (نزيد إذا كان اتجاه السهم في نفس اتجاه المسار ونطرح تلك الكمية إذا كان اتجاه السهم عكس اتجاه المسار). وكذلك حسب القدرات المتبقية عبر الأسهم (عادة ما يرفع التدفق عبر هذا المسار حسب السهم ذو كمية التدفق المتبقية الأصغر).

5- إعادة العمليات من **1** إلى **4** حتى الوصول إلى مرحلة لا يمكن فيها الوصول بالعلامات (الإشارات) حتى الرأس النهاية للشبكة.

مثال**1**:

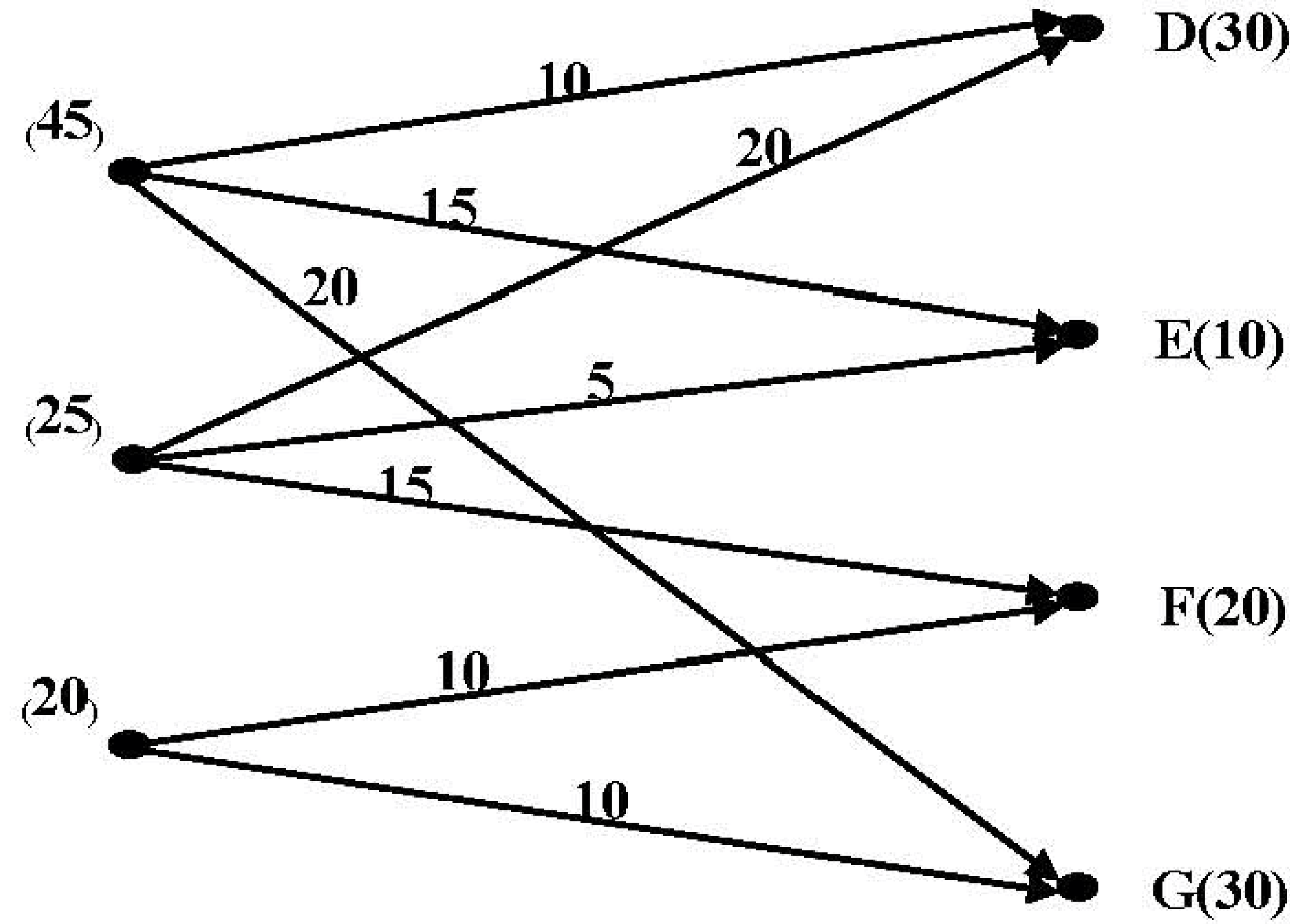
ليكن لدينا ثلاث خزانات للماء (**A,B,C**) يزوّدون أربع قرى (**D,E,F,G**) بالماء الصالح للشرب.

قدرة التزود للخزان (**A**) هي **45** ل./ثانية.

قدرة التزود للخزان (**B**) هي **25** ل./ثانية.

أما قدرة التزود للخزان (**C**) فهي **20** ل./ثانية.

ترتبط هذه الخزانات بشبكات الاستهلاك في القرى الأربع من خلال شبكة توزيع المياه، التي سعتها موضحة بالشكل التالي:



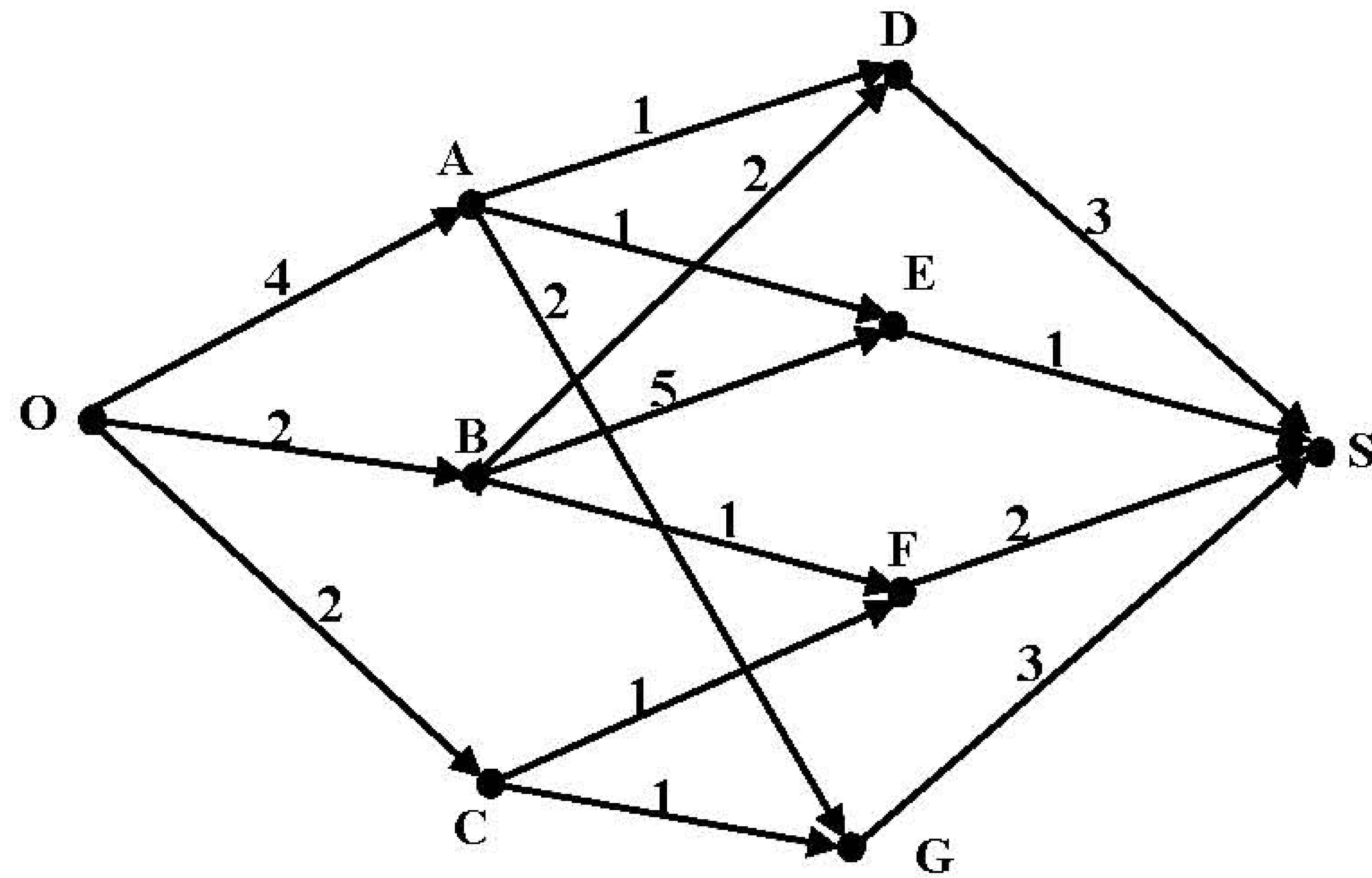
القرية (**D**) تحتاج إلى قدرة ضخ سعتها 30 ل/ث، القرية (**E**) تحتاج إلى سعة قدرها 10 ل/ث، القرية (**F**) تحتاج إلى 20ل/ث والقرية (**G**) إلى 30ل/ث.

المطلوب: تحديد مقدار التدفق الأعظم للماء عبر الشبكة الذي يسمح للقرى الأربع التزود بأكبر قدر من الماء.

الحل:

المخطط السابق يوضح الشبكة التي تربط بين منابع التزود بالماء (الخزانات) وأماكن استهلاكه في القرى.

نضيف إلى هذا المخطط رأس أو مدخل ابتدائي وهمي نرمز له بالرمز (**O**)، ورأس آخر نهائي نرمز له بالرمز (**S**)، ونضع على الأسهم (**OC,OB,OA**) السعات الموجودة في الخزانات ونضع أيضا على الأسهم (**GS,ES,FS,DS**) الكميات المطلوبة في القرى. فتصبح الشبكة كالتالي:



المشكل المطروح الآن يتمثل في محاولة تمرير أكبر تدفق أو انسياب للماء بين (**O**) و(**S**).

من أجل حل هذه المسألة نستطيع استعمال طريقة **Ford–Fulkerson**، والتي تتمثل في البحث عن تدفق كامل في المرحلة الأولى ثم البحث عن تدفق أعظم إذا كان طلك ممكنا.

المرحلة الأولى: البحث عن تدفق كامل.

– نبدأ أولا بوضع قائمة بالأسهم التي تتكون منها الشبكة حسب ترتيب ما (مثلا نعتمد الترتيب الأبجدي) مع توضيح طاقاتها (قدراتها) وتكوين جدول بذلك.

– نتفحص قائمة تلك الأسهم (نبدأ من رأس القائمة إلى نهايتها بالترتيب) ونختار السهم ذو قدرة النقل الأصغر (C_o) الذي نصادفه هو الأول انطلاقا من بداية القائمة: بمعنى إذا كان هناك سهمان لديهما طاقتا نقل صغيرتان متساويتان فنبدأ بالأول انطلاقا من رأس القائمة. في المثال الذي نحن بصدده، السهم ذو طاقة النقل الأصغر الوحيد في القائمة هو السهم (**BE**) وطاقته هي (**5**).

– نكون مسارا بسيطا يضم (**BE**) ابتدءا من (**O**) إلى (**S**)، وذلك باختيار أسهم ابتداءا من رأس القائمة واحترام الترتيب الأبجدي. فيكون هذا المسار هو (**OB,** **BE, ES**) وهو مسار بسيط ولا يحتوي على حلقة، فنمرر فيه كمية مقدارها 5 .

بعد هذا، السهم (**BE**) يصبح مشبعا: أي أن قدرة النقل المتبقية فيه تساوي الصفر($P_{ij} = 0$)، أما السهمين الآخرين في هذا المسار وهما (**OB, ES**) فتكون قدرة النقل المتبقية فيهما هي: $P_{OB} = 20$, $P_{ES} = 5$.

– نبحث الآن إذا كان هناك ضرورة لسد أو غلق بعض الأسهم المنطلقة أو التي تصب في رأسي السهم المشبع (**BE**) حسب القاعدة **4** لهذه الطريقة، فنلاحظ أنه لا توجد ضرورة لذلك.

– نعيد النظر من جديد في القائمة المتبقية من الأسهم، ونبحث عن السهم ذو قدرة النقل الأصغر ابتدءا من رأس القائمة، فنجد أن هذا السهم هم (**ES**) ذو

طاقة التدفق **5**.نكون مسارا بسيطا يتضمن هذا السهم وهو(**OA,AE,ES**). نلاحظ أن هذا المسار لا يحتوي على حلقة، فنمرر فيه الكمية **5**. بعد هذه الخطوة يجب سد أو غلق السهم (**ES**) الذي أصبح مشبعا الآن.

– السهم ذو الكمية الأصغر الآن هو (**AD**) وقدرة النقل المتبقية فيه هي **10**، فنجري نفس العمليات السابقة. نلاحظ الآن أنه بعد أن أصبح السهم(**ES**) مشبعا، فإنه يجب سد أو غلق السهمان اللذان يصبان في الرأس (**E**) السهمان (**BE, AE,**): السهم (**BE**) مشبع ومحيّد من قبل، يبقى علينا غلق السهم (**AE**).

– نستمر هكذا حتى تصبح كل الأسهم في الشبكة إما مشبعة (ذات كمية $P_{ij} = 0$) أو مغلقة (فوقها علامة شطب ×).

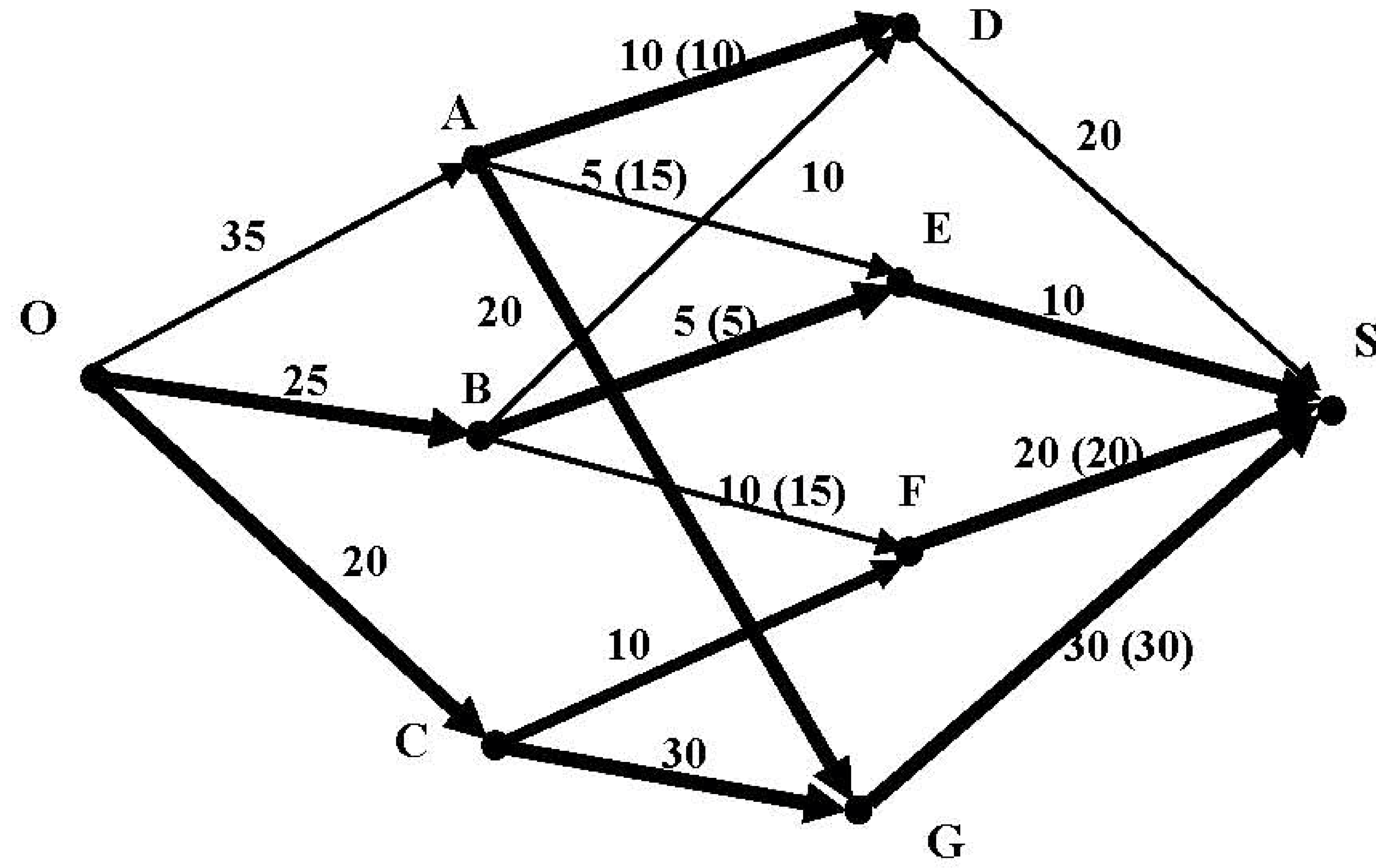
– كل عمليات توزيع الماء عبر الشبكة في إطار البحث عن تدفق كامل موضحة في الجدول أدناه:

السهم	طاقة النقل المتبقية في قنوات الشبكة								
OA	45	45	40	30	30	30	30	30	~~10~~
OB	25	20	20	20	20	20	10	0	0
OC	20	20	20	20	10	0	0	0	0
AD	10	10	10	0	0	0	0	0	0
AE	15	15	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~10~~
AG	20	20	20	20	20	20	20	20	0
BD	20	20	20	20	20	20	20	~~10~~	~~10~~
BE	5	0	0	0	0	0	0	0	0
BF	15	15	15	15	15	15	~~5~~	~~5~~	~~5~~
CF	10	10	10	10	0	0	0	0	0
CG	10	10	10	10	10	0	0	0	0
DS	30	30	30	20	20	20	20	~~10~~	~~10~~
ES	10	5	0	0	0	0	0	0	0
FS	20	20	20	20	10	10	0	0	0
GS	30	30	30	30	30	20	20	20	0

نقل القيم الموجودة في العمود الأخير من الجدول إلى الشبكة : إذا كان السهم يقابله صفر فهذا يعني أن السهم (القناة) مشبع، وإذا كان يقابله علامة شطب فمعنى ذلك أنه غير مشبع والكمية المشطوبة فيه تعني قدرة النقل المتبقية في هذه القناة.

– في المحصلة يتضح من الرسم أن كل الأسهم التي تصب في الرأس النهائي أصبحت كلها مشبعة أو مغلقة (مشطوبة)، و(أو) أن الأسهم المنطلقة من الرأس الابتدائي أصبحت كلها مشبعة أو مغلقة أيضا.

هذه الحالة تعكس وضعية تحقيق تدفق كامل عبر الشبكة يساوي **80**ل/ث.، كما هو معبر عنه من خلال الشبكة التالية:



المرحلة الثانية: البحث عن تدفق أمثل.

المحاولة الأولى:

- نضع علامة معينة (مثلا العلامة **+**) على الرأس الابتدائي(**O**).
- نضع هذه العلامة عند أي رأس نهائي (**j**) لأي سهم ($\overrightarrow{\mathbf{I, j}}$) غير مشبع، الذي يكون طرفه الابتدائي (**i**) عليه علامة(+).
- إذا كان أي سهم مستعمل (بطاقة متبقية **P_{ij} > 0**) أو مشبع وكان طرفه النهائي (**j**) معين بعلامة (+) فنضع عند طرفه الابتدائي العلامة (–).
- بالرجوع إلى مثالنا: نضع علامة (+) أمام الرأس الابتدائي(**O**).
- الرأس (**A**) هو الطرف النهائي للسهم (**OA**) وهو غير مشبع وطرفه الابتدائي (**O**) معين بعلامة (+)، فضع أمام (**A**) العلامة (**O+**).

– E هو الطرف النهائي للسهم (AE)، وهو سهم غير مشبع وطرفه الابتدائي (A) معين بعلامة، فنضع أمام E العلامة (A+).

– B هو الطرف الابتدائي للسهم (BE)، وفيه كمية متبقية أكبر من الصفر، فنعينه بعلامة (E–)، على أساس أن طرفه النهائي (E) معين بعلامة (A+).

– D هو الطرف النهائي للسهم (BD)، وهو سهم غير مشبع وطرفه الابتدائي (B) معين بعلامة، فنضع أمام D العلامة (B+).

– وأخيرا S هو الطرف النهائي للسهم (DS)، وهو سهم غير مشبع وطرفه الابتدائي (D) معين بعلامة، فنضع أمام S العلامة (D+).

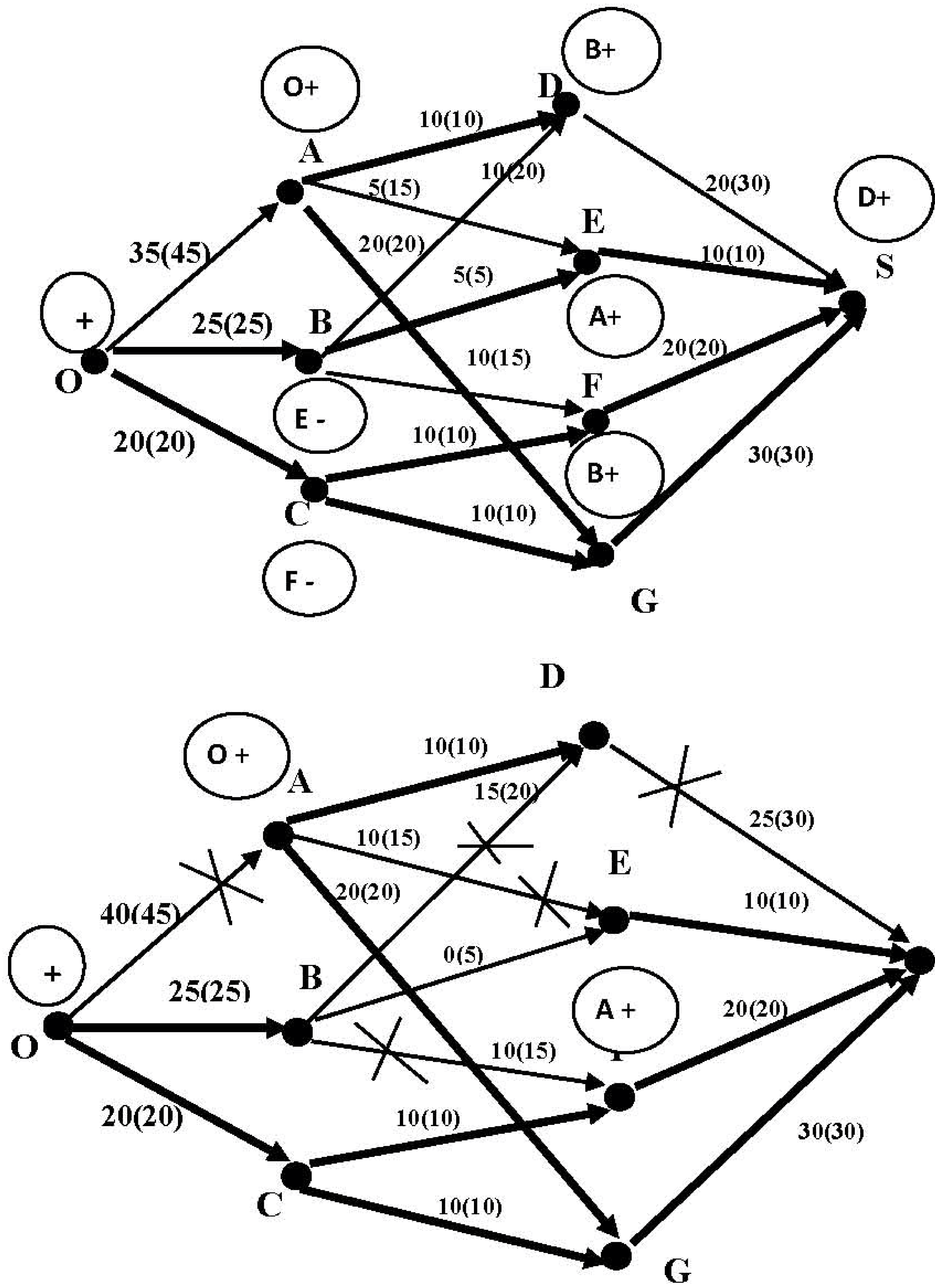
– لقد وصلنا بعلامات التعيين حتى الرأس النهائي للشبكة وهذا دليل على أن التدفق الكامل الذي وصلنا إليه ليس تدفقا أعظميا.

– نأخذ الآن المسار المكون من الأسهم التي تمر بالرؤوس التي هي معينة بعلامات (+) أو (–) من بداية الشبكة إلى نهايتها. هذا المسار هو:
.OA, AE, EB, BD, DS

فإذا كنا نريد تحسين التدفق (رفعه) يجب زيادة التدفق الذي يمر من الأسهم () وفي نفس الوقت تخفيض (بنفس الكمية) التدفق الذي يمر من السهم (BE)، وذلك لأنه في حالة السهم (BE) يجب تفريغه من الكمية المنقولة فيه حاليا وهذا يعني السير بالاتجاه العكسي لهذا السهم ($\overleftarrow{BE}$) .

– الكمية التي يجب زيادتها وتخفيضا عبر هذا المسار يجب أن تعادل طاقة النقل المتبقية في السهم ذو قدرة النقل الأصغر في المسار إليه، وهي في حالتنا هذه تساوي 5، وهي طاقة السهم (BE).

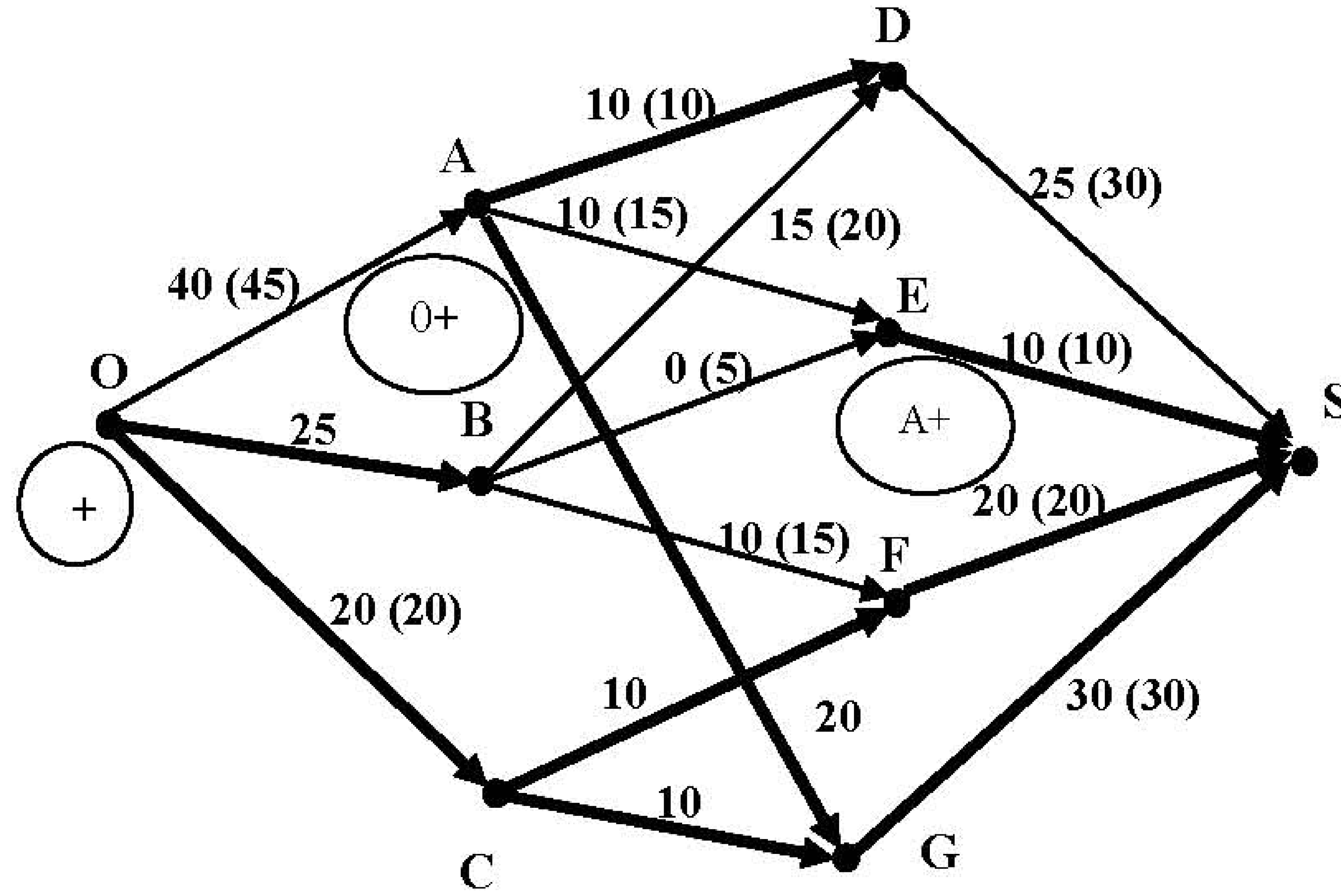
– نمرر إذن كمية مقدارها 5 وحدات عبر المسار السابق، فنحصل على شبكة نقل أخرى بمقدار تدفق كلي جديد يساوي **85ل/ث**.كالتالي:


B+
O+
D
10(10)
A
10(20)
5(15)
20(30)
D+
E
20(20)
10(10)
35(45)
5(5)
S
+
25(25)
B
A+
10(15)
20(20)
O
F
E -
20(20)
10(10)
30(30)
B+
C
10(10)
F -
G
D
10(10)
O +
A
15(20)
25(30)
10(15)
E
20(20)
10(10)
S
40(45)
0(5)
+
B
A +
20(20)
25(25)
10(15)
O
20(20)
10(10)
30(30)
C
10(10)
G

المحاولة الثانية:

نعيد وضع العلامات على الرؤوس من جديد، لكننا نلاحظ أننا لا نستطيع الوصول بهذه العلامات إلا إلى الرأس (**E**)، الذي يوجد أمامه العلامة (**A+**). عدم إمكانية توصيل العلامات حتى الرأس النهائي (**S**) يشير إلى أن التدفق الذي حصلنا عليه بعد المحاولة الأولى هو تدفق أعظم مقداره **85** ل/ث لكل القرى، ولا توجد إمكانية أخرى لرفعه أكثر من ذلك في ظل الشبكة الحالية.

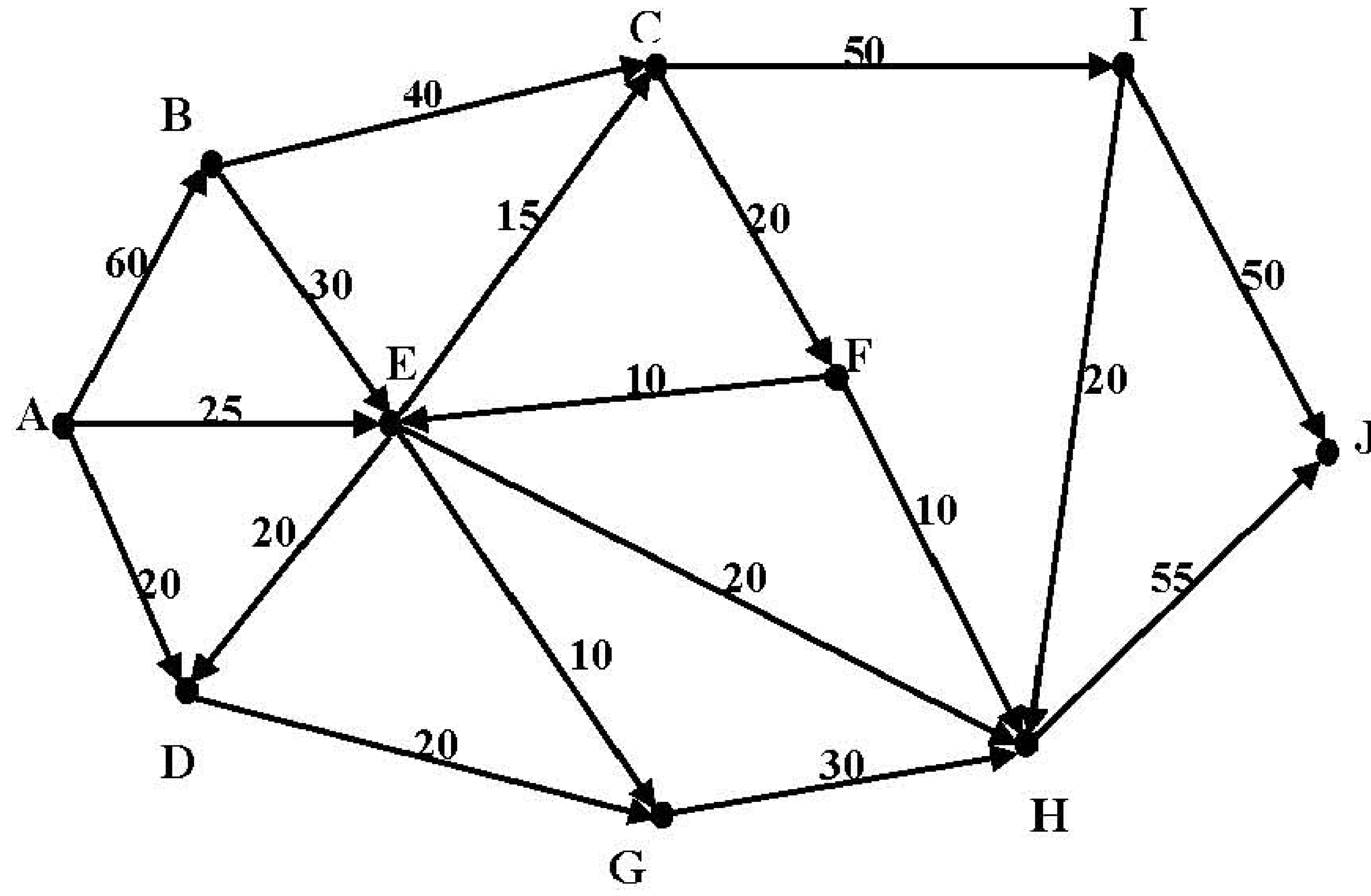
إذا أردنا تحسين التدفق أكثر من ذلك، بحيث يشبع كل الطلب على الماء في القرى الأربع، يجب إنشاء قناة إضافية على مستوى القناة (**AD**) (أو توسيع قدرة هذه القناة) بمقدار 5 ل/ث. موجهة إلى القرية (**D**). أو قناة إضافية على مستوى (**OB**) موجهة لتدعيم القناة (**BD**).



مثال2:

لتكن شبكة النقل التالية والمقادير الموجودة فوق الأسهم هي قدرات الانسياب للطرق المختلفة لهذه الشبكة.

المطلوب: تحديد أعظم تدفق ممكن عبر هذه الشبكة.



الحل:

أولا: البحث عن تدفق كامل.

نبدأ بوضع جدول يتضمن في عموده الأول قائمة بالأسهم المكونة لهذه الشبكة حسب الترتيب الأبجدي، وفي عموده الثاني الكميات الممكن نقلها عبر طرق هذه الشبكة.

السهم	قدرة النقل المتبقية في قنوات الشبكة						
AB	60	60	50	50	45	30	5
AD	20	20	20	20	20	20	20
AE	25	15	15	0	0	0	0
BC	40	40	30	30	25	25	0
BE	30	30	30	30	30	15	15
CF	20	20	10	10	10	10	10
CI	50	50	50	35	30	30	5
DG	20	20	20	20	20	20	20
EC	15	15	15	0	0	0	0
ED	20	20	20	20	20	20	20
EG	10	0	0	0	0	0	0
EH	20	20	20	20	20	5	5
FE	10	10	10	10	10	10	10
FH	10	10	0	0	0	0	0
GH	30	20	20	20	20	20	20
HJ	55	45	35	20	15	0	0
IH	20	20	20	5	0	0	0
IJ	50	50	50	50	50	50	25

نتفحص قائمة تلك الأسهم (ابتداءا من رأس القائمة حسب الترتيب الأبجدي) ونختار السهم ذو قدرة النقل الأصغر الذي يأتي هو الأول من أعلى رأس القائمة. هذا السهم هو (**EG**) وطاقته المتاحة هي **10**، نكون إذن مسارا بسيطا يضم (**EG**) ابتداءا من (**A**) وإلى (**J**).

يتم ذلك باختيار أسهم ابتداءا من رأس القائمة فيكون هذا المسار هو (**AE, EG, GH, HJ**) وهو مسار بسيط ولا يحتوي على حلقة، فنمرر فيه كمية مقدارها **10** (وهي كمية تعادل سعة السهم **EG**).

بعد هذا، السهم **EG** يصبح مشبعا (أي أن: $\mathbf{P_{EG} = 0}$)، بينما الأسهم الأخرى المنتمية للمسار المشار إليه تصبح الكميات المتبقية فيها أكبر من الصفر ($\mathbf{P_{AE} = 15}$)، ($\mathbf{P_{GH} = 20}$)، ($\mathbf{P_{HJ} = 45}$).

نتفحص الآن إذا ما كانت هناك ضرورة لغلق أو سد بعض الأسهم المنطلقة أو التي تصب في رؤوس المسار المدروس، فنلاحظ أنه لا توجد ضرورة لذلك.

نعيد العمليات السابقة وذلك بحثا عن تدفق كامل، بتفحص قائمة الأسهم من جديد، ابتداءا من رأس القائمة، نلاحظ الآن أن السهم ذو إمكانية النقل الأصغر هو (**FE**) وقدرته هي **10**. نكون مسارا بسيطا يضم هذا السهم حسب الترتيب الأبجدي، ونجد أن هذا المسار هو (**AB,BC ,CF, FE, CF,FE,...**) وهو مسار غير بسيط (يحتوي على **حلقة هي**FE,EC,CF)، فنوقف أو نسد السهم (**FE**) وهو السهم ذو قدرة النقل الأصغر في هذه الحلقة، وتكون الكمية المنقولة في هذا السهم بعد غلقه تساوي صفر.

نتفحص قـائمة الأسهم من جديـــد، نلاحظ أن السهم ذو السعة الأصغر الآن هو (**FH**) والمسار البسيط الذي يضمه هو (**AB,BC ,CF, FH, HJ**)، وهو مسار خال من أي حلقة.

نمرر الآن في هذا المسار كمية مقدارها 10، وهي الكمية المعادلة لسعة السهم المختار (**FH**)، بعد هذا يصبح السهم (**FH**) مشبعا، وهذا يتطلب سد أو غلق السهم (**CF**) لأن هذا السهم يصب في الرأس (**F**) الذي يتفرع منه سهمان (**FH**: مشبع) والأخر(**FE** : مغلق).

السهم صاحب السعة الأصغر بعد ذلك هو (**AE**) والمسار الذي يشمله هو (**AE,EC,CI,IH,HJ**)، وبما أن هذا المسار بسيط ولا يحتوي على حلقة، فنمرر فيه الكمية المعادلة لسعة (**AE**) وهي **15**.

بعد ذلك (**AE**) يصبح مشبعا، ونتيجة لذلك يتشبع السهم (**EC**) أيضا. على إثر هذه العملية لا توجد ضرورة لغلق أي سهم.

السهم ذو السعة الأصغر الآن هو (**IH**) بطاقة نقل قدرها **5**، والمسار الذي يضمه هو (**AB,BC,CI,IH,HJ**)، هذا المسار بسيط ولا يحتوي على حلقة، فنمرر فيه الكمية 5. يترتب على هذا تشبع السهم (**IH**)، ولا توجد ضرورة لسد أي سهم.

الدور الآن للسهم (**HJ**)بكمية منقولة دنيا تساوي 15،ننقلها عبر المسار البسيط (**AB,BE,EH,HJ**)وهو مسار لا يحتوي حلقة فنمرر فيه الكمية **15**. نتيجة لهذا يتشبع السهم (**HJ**)،ونضطر لغلق الأسهم(**GH,EH,ED,DG,BE,AD**).

السهم ذو قدرة النقل الأصغر الآن هو (**BC**) وقدرة النقل المتبقية فيه هي **25**، هذه الكمية يجب تمريرها عبر المسار (**AB,BC,CI,IJ**) وهو مسار بسيط خال من أي حلقة، هذه العملية تؤدي إلى تشبّع السهم (**BC**) وتتطلب غلق الأسهم (**AB,CI,IJ**).

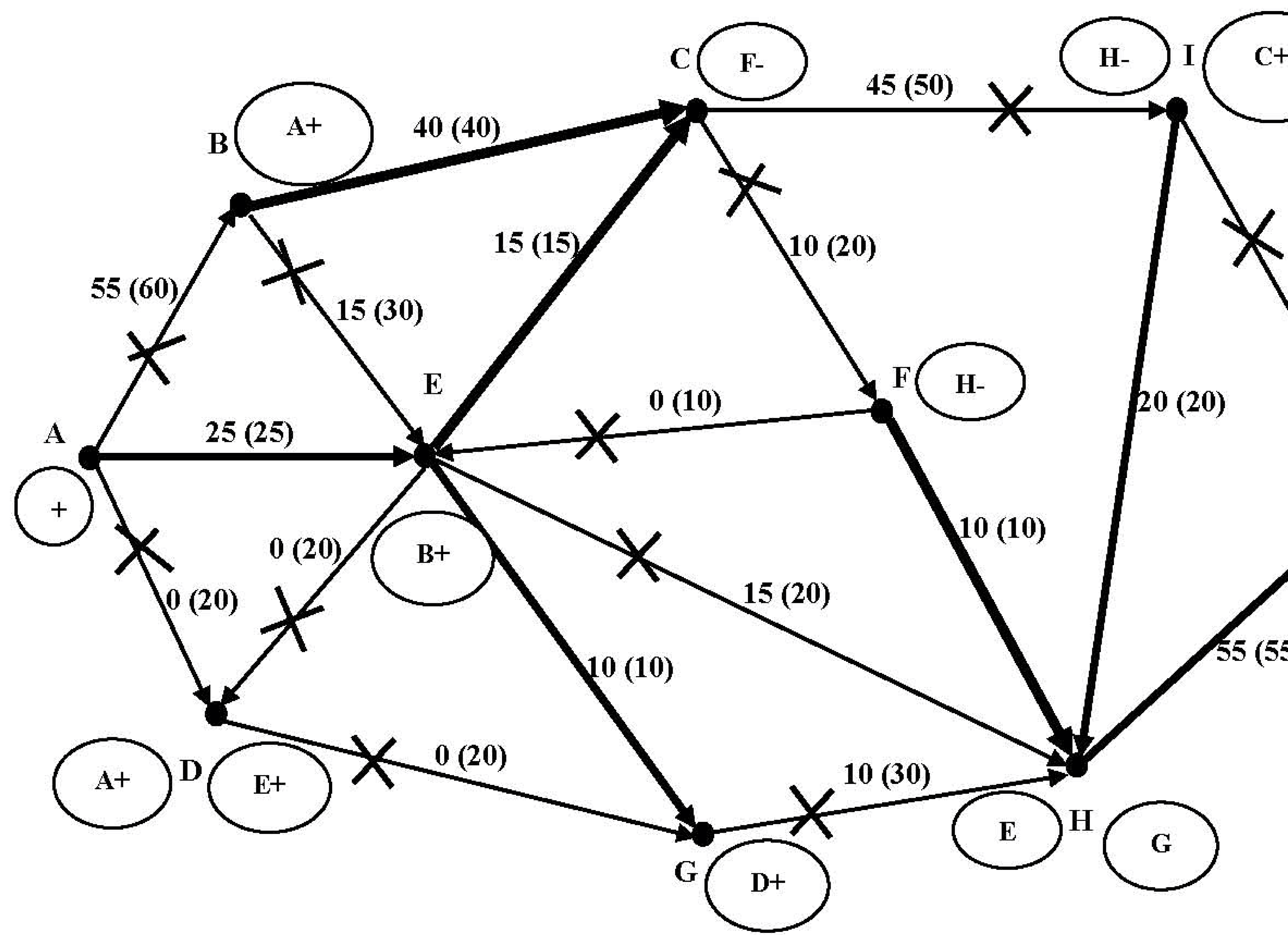
لقد أصبحت الآن كل الأسهم إما **مشبعة** (بكمية متبقية تساوي الصفر) أو **مغلقة** (لكن بكمية منقولة أقل من طاقتها النظرية). في هذه المرحلة نلاحظ أن كل الأسهم التي تصب في الرأس الأخير هي إما مشبعة أو مغلقة، وأيضا الأسهم التي تنطلق من الرأس الابتدائي هي أيضا إما مشبعة أو مغلقة، وهذا يؤشر على الوصول إلى تدفق كامل عبر الشبكة المعطاة.

يبقى الآن أن نسجل على كل سهم الكمية المنقولة فيه حسب حل التدفق الكامل، وذلك بالنظر إلى العمود الأخير من جدول الحل السابق.

مثلا:

نلاحظ أن السهم (**AB**) مشطوب وفيه الكمية **5**، هذا يعني أن هذا السهم لا زال يتوفر على إمكانية نقل مقدارها **5**، أما السهم (**AD**) فهو أيضا مشطوب وفيه الكمية **20**، التي تعني أن طاقة النقل النظرية لهذا السهم هي أيضا غير مستغلة بالكامل ويمكن أن نزيد من إمكانية استعماله بمقدار 20. وهكذا بقية الأسهم غير المشبعة.

قيمة **التدفق الكامل** المحصل عليه عبر الشبكة هو **80**، وهذا موضح من خلال الشبكة التالية:


A
+
B
A+
C
F-
I
C+
H-
40 (40)
45 (50)
55 (60)
15 (30)
15 (15)
10 (20)
E
F
H-
0 (10)
25 (25)
20 (20)
10 (10)
0 (20)
B+
0 (20)
15 (20)
10 (10)
D
A+
E+
0 (20)
10 (30)
G
D+
H
E
G

ثانيا: البحث عن تدفق أعظم.

من أجل البحث عن تدفق أعظم عبر الشبكة المعطاة، نبدأ في عملية وضع العلامات على رؤوس هذه الشبكة (le marquage des sommets). نلاحظ بعد الانتهاء من وضع العلامات أننا وصلنا بهذه العلامات حتى الرأس الأخير (**j**) وهذا يعني أن التدفق الكامل الذي حصلنا عليه لا يشكل تدفقا أعظميا، وبالتالي يمكن تحسينه.

المحاولة الأولى:

نستطيع تحسين التدفق عن طريق عدة مسارات:

– هناك المسار (**AB,BE,ED,DG,GH,HI,IJ**)، لكن هذا المسار لا نستطيع أن نمرر فيه إلا الكمية 5 وهي الكمية المتبقية في السهم (**AB**).

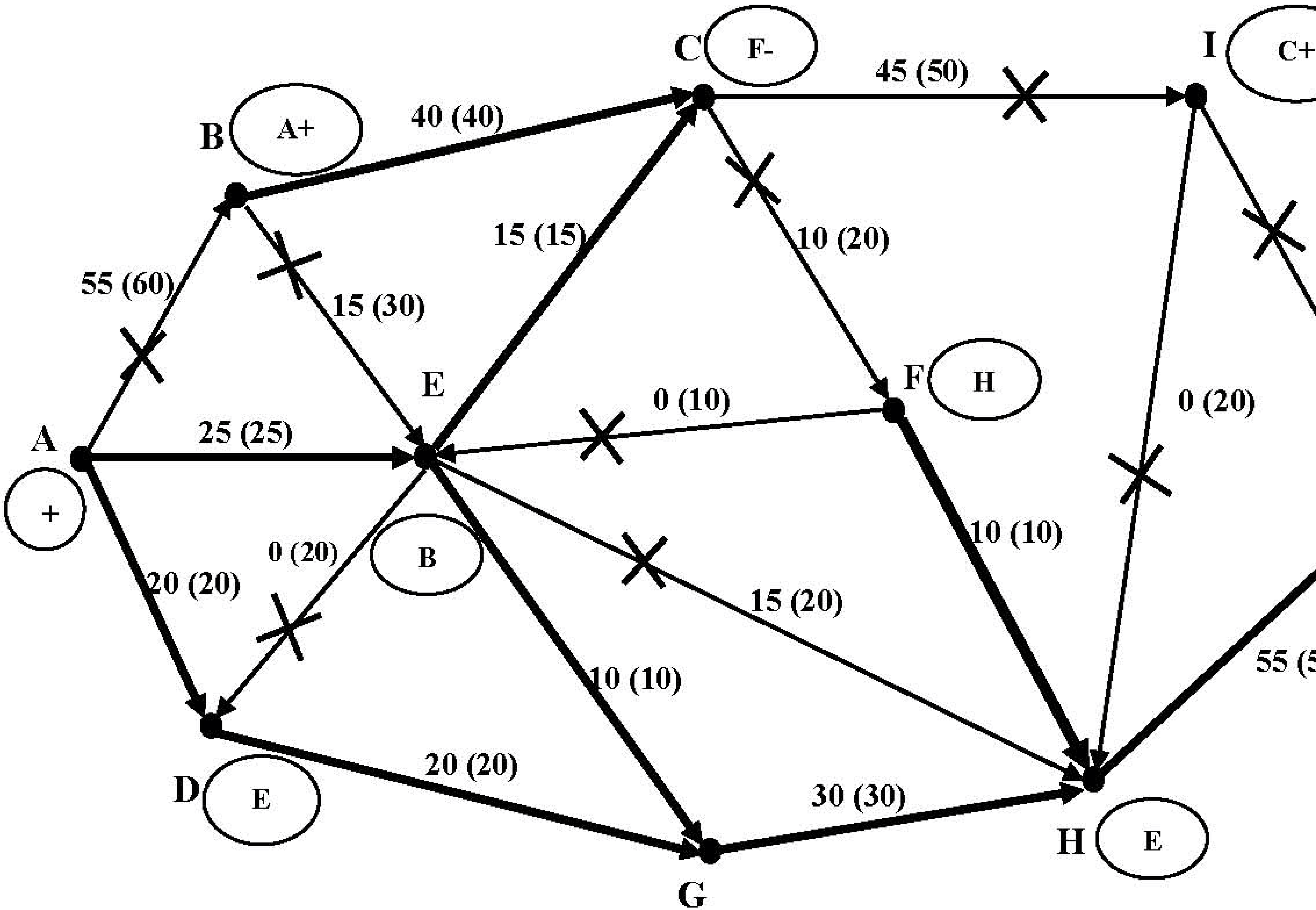
– المسار (**AB,BE,EH,HI,IJ**) الذي لا نستطيع أن نمرر فيه إلا الكمية 5 وهي الكمية المتبقية في السهم (**AB**).

– هناك مسار آخر هو (**AD,DG,GH,HI,IJ**) وهذا المسار يمكن أن نمرر فيه كمية مقدارها **20** وهي الكمية المتبقية في معظم أسهم هذا المسار.

– هناك أيضا المسار (**AB,BE,EH,HF,FC,CI,IJ**) بكمية تدفق قصوى مقدارها 5، وهي الكمية المتبقية في السهم (**CI**).

من بين كل هذه المسارات، نختار المسار (**AD,DG,GH,HI,IJ**) لأنه يسمح بتمرير كمية قصوى مقدارها **20**. تمرير هذه الكمية عبر المسار المذكور يتم بزيادة التدفق عبر الأسهم (**AD,DG,GH,IJ**) بمقدار **20** وحدة وخفضه في السهم

(HI) بنفس الكمية. على إثر هذه العملية نحصل على تدفق كلي جديد عبر الشبكة مقداره **100**، وهذا موضح في الشبكة التالية:



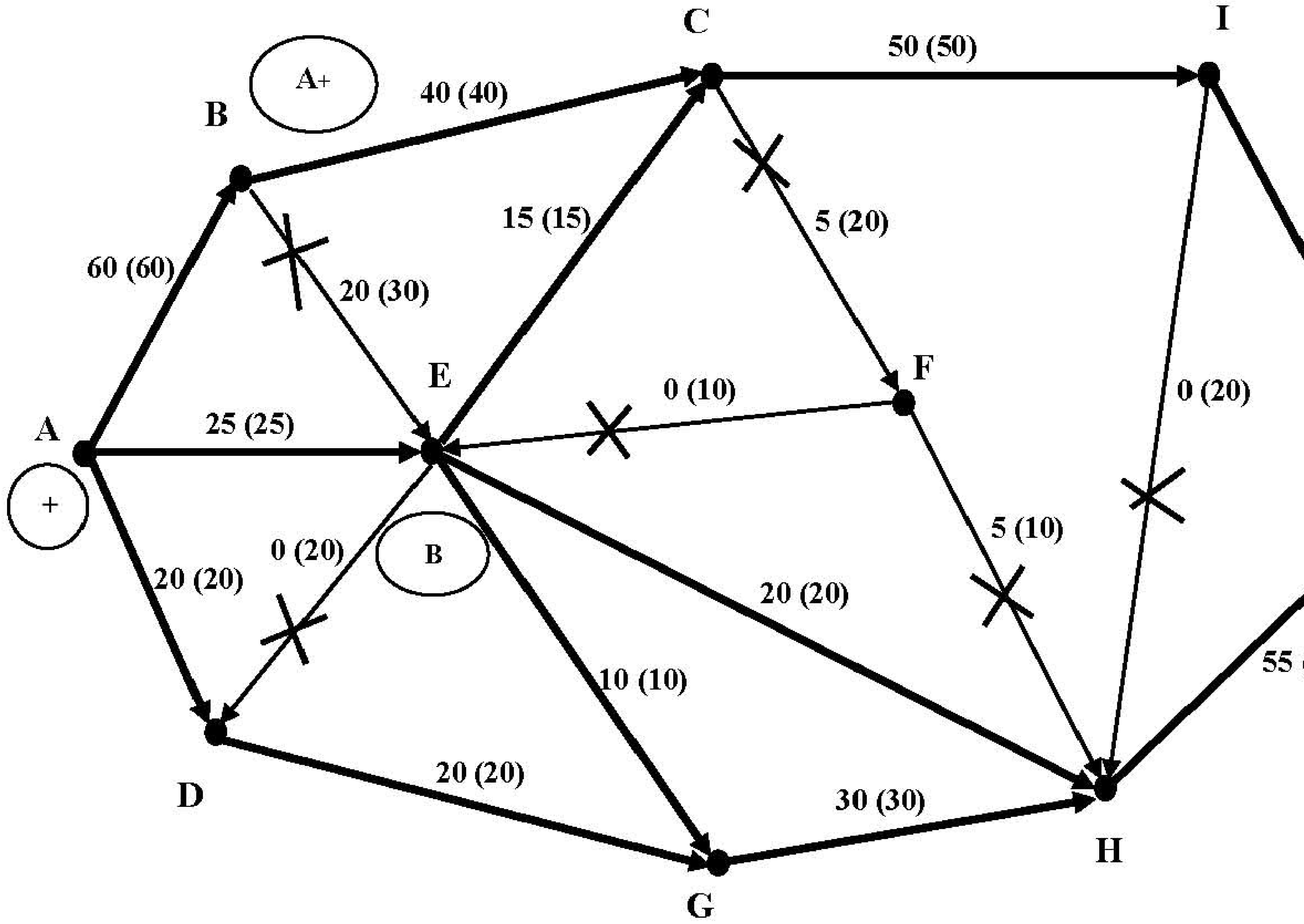
C
F-
45 (50)
I
C+
B
A+
40 (40)
15 (15)
10 (20)
55 (60)
15 (30)
E
F
H
0 (20)
0 (10)
A
25 (25)
+
0 (20)
B
10 (10)
20 (20)
15 (20)
55 (5
10 (10)
20 (20)
D
E
30 (30)
H
E
G

المحاولة الثانية:

لتحسين الحل (زيادة التدفق عبر الشبكة)، نعيد عملية التعيين من جديد، أي إعادة وضع العلامات على رؤوس الشبكة المحصل عليها من المحاولة السابقة.

نلاحظ هنا أيضا أننا نستطيع أن نصل بالعلامات إلى أخر رأس في الشبكة، وهذا يعني أننا لم نصل إلى التدفق الأعظم عبر هذه الشبكة، وأن هناك إمكانيات متاحة لتحسين التدفق عبرها. نستطيع فعلا أن نحسن التدفق عبر المسار الذي يمر من الرؤوس التي عليها علامات التعيين، وهذا المسار هو (**AB**,**BE**,**EH**,**HF**,**FC**,**CI**,**IJ**).

يمكننا رفع طاقة التدفق بـ **5** وحدات، وهي القدرة المتبقية في ثلاث أسهم من هذا المسار، ويصبح التدفق الكلي الجديد من بداية الشبكة إلى نهايتها هو **105** وحدة. الشبكة التالية توضح إمكانيات التدفق الجديدة.



A
+
B
A+
C
I
E
F
D
G
H
B
60 (60)
40 (40)
50 (50)
15 (15)
5 (20)
20 (30)
25 (25)
0 (10)
0 (20)
0 (20)
5 (10)
20 (20)
20 (20)
10 (10)
20 (20)
30 (30)
55

المحاولة الثالثة:

نجري عملية تعيين الرؤوس من جديد، ونلاحظ في هذه الحالة أننا نستطيع وضع علامة التعيين عند الرأس الابتدائي فقط ولا يمكن إيصال علامات التعيين إلى الرؤوس الأخرى، وهذا يدل على الوصول إلى مرحلة استنفاذ إمكانيات تحسين التدفق عبر الشبكة، وبالتالي تحقيق تدفق أعظم إلى نهاية الشبكة يساوي **105** وحدة.

تمارين

تمرين1:

يحتوي الجدول التالي على قائمة الأسهم المكونة لشبكة نقل معينة، الأسهم السابقة لها مباشرة وكذلك القيم المرافقة للأسهم.

المطلوب:

1- رسم الشبكة المناسبة.

2- تحديد التدفق الأعظم عبر هذه الشبكة.

السهم	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
القيمة المرافقة له	12	15	9	9	5	8	4	14	5	14	3
السهم السابق له مباشرة	–	–	–	E,A	H,L ,M	A,E	C, I	G, F, B	H, L M	C, I	S, O
السهم	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
القيمة المرافقة له	8	12	2	12	13	11	15	4	12	5	10
السهم السابق له مباشرة	D, K	N, J	U,Q	H,L ,M	H,L ,M	H,L ,M	S, O	P	P	P	U, Q

الجواب:

2- عند البحث عن تدفق كامل نصادف عدة حلقات، التي يجب تجاوزها وهي كالتالي:

الحلقة (**M–Q–N**) ومن أجل تجاوزها يجب غلق السهم ذو السعة الأصغر وهو (**N**).

الحلقة (**O–K–L**) ومن أجل تجاوزها يجب غلق السهم ذو القيمة المرافقة الأصغر وهو (**K**).

الحلقة (**F–H–E**) ومن أجل تجاوزها يجب غلق السهم ذو السعة الأصغر وهو (**E**).

الحلقة (**G–H–I**) ومن أجل تجاوزها يجب سد السهم ذو القيمة المرافقة الأصغر وهو (**G**).

بعد التخلص من هذه الحلقات يمكن الوصول إلى تدفق كامل يساوي **29** وحدة.

بعد المحاولة الأولى يمكن تحسين التدفق والوصول إلى تدفق أمثل يساوي **31** وحدة.

تمرين2:

لدينا المعطيات التالية المتعلقة بشبكة نقل معينة.

المطلوب:

تكوين شبكة النقل المناسبة، ثم استخراج قيمة التدفق الأعظم الذي يمكن تحقيقه عبر هذه الشبكة.

M	L	K	J	I	H	G	F	E	D	C	B	A	السهم
8	2	8	1	7	3	5	4	2	6	14	8	6	القيمة المرافقة له
D	C	C	C	B,F, J	B, F, J	S, IK	A,G ,	A, G,	G, A	–	–	–	السهم السابق له مباشرة
Z	Y	X	W	V	U	T	S	R	Q	P	O	N	السهم
12	9	2	5	6	9	4	7	1	6	9	2	11	القيمة المرافقة له
Y, Q W	N, L	N, L	H, T R	H,T ,R	O ,P	N, L	H,T ,R	E, M	E, M	E, M	D	S, IK	السهم السابق له مباشرة

الجواب:

2– أثناء البحث عن تدفق كامل من الضروري التخلص من الحلقات التالية:

الحلقة (G–I–F) وتتطلب غلق السهم ذو السعة الأصغر في الحلقة وهو (F).

الحلقة (S–N–T) ومن أجل تجاوزها يجب غلق السهم ذو السعة الأصغر وهو (T).

بعد التخلص من الحلقات في مسار البحث عن تدفق كامل، نحصل على تدفق كامل مقداره **18**.

البحث عن تدفق أعظم يتطلب إنجاز ثلاث محاولات:

بعد المحاولة الأولى يتحسن التدفق بمقدار **2** وحدة، ثم بعد المحاولة الثانية يمكن إضافة وحدة واحدة إلى التدفق السابق، فنحصل على تدفق أمثل يساوي **21**.

تمرين3:

كون شبكة النقل ذات المعطيات المتضمنة في الجدول أدناه واحسب التدفق الأعظم الممكن تحقيقه فيها.

السهم	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
القيمة المرافقة له	60	50	50	50	35	15	10	25	20	5
السهم السابق له مباشرة	–	–	–	–	A	A	A	B	B	B
السهم	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
القيمة المرافقة له	10	20	40	10	20	40	50	40	45	75
السهم السابق له مباشرة	C	C	C	D	D	D	E, H	F,I, K,N	G,J,, L,O	P, M

الجواب:

2– التدفق الكامل يساوي **185**.

التدفق الأعظم يمكن الحصول عليه عبر محاولتين كالتالي:

في المحاولة الأولى نستطيع إضافة **10** وحدات إلى التدفق المحصل عليه سابق، وفي المحاولة الثانية يمكن تحسين هذا التدفق بـ **5** وحدات ويصبح التدفق الأمثل يساوي **200** وحدة.

القسم الثاني

شبكات الأعمال

لقد ظهرت الحاجة إلى الاستعانة أكثر فأكثر بالوسائل والطرق الرياضية والإحصائية في تخطيط، تقيم ومراقبة تنفيذ المشاريع الاقتصادية عندما كبر حجم هذه المشاريع وتعقدت مهام تنفيذها، وكبر أيضا حجم الوسائل المستعملة في إنجازها وعدد المساهمين فيها.

قبل الستينات كانت الطريقة الشائعة المستعملة من قبل المشرفين على تنفيذ المشاريع هي طريقة أو مخطط (**GANTT**)، ولكن بمرور الزمن بدأ المسيرون للمشاريع يلاقون صعوبات ويجابهون مشاكل كثيرة لم يستطع استعمال هذه التقنية مساعدتهم في حلها، وبدا وكأنها تجاوزها الزمن.

من هذه الصعوبات مثلا:

– التأخر المستمر و الكبير في إنجاز المشاريع وتسليمها إلى الزبائن في وقتها المحدد كنتيجة لعدم التحكم في تنفيذ هذه المشاريع.

– التقدير السيئ للاحتياجات من الموارد المالية ووسائل الإنجاز الضرورية لإنهاء المشاريع في أحسن الظروف.

– عدم وجود هدف واضح ومحدد للمشروع المراد إنجازه، يكون مقبولا وسهل الاستيعاب من طرف جميع المشاركين في إنجاز المشروع.

– سوء التقدير المسبق والدقيق لكل قيود البيئة الخارجية وتأثيرها على النشاطات المختلفة المكونة للمشروع وما يترتب على ذلك من سوء تسير مخزون المواد المستعملة ووسائل الإنجاز.

– نقص التنسيق بين الهيئات المركزية المشرفة على إنجاز المشروع والذين يشرفون على التنفيذ المباشر لمختلف نشاطاته.

- عدم التحكم الجيد وعدم فعالية مهمة المراقبة المستمرة لمراحل إنجاز المشروع.

ومن أجل التغلب على هذه الصعوبات وغيرها والتحكم في أخذ القرارات الضرورية في أحسن الظروف، ظهرت إلى الوجود عدة طرق وتقنيات حديثة للمساعدة على تحسين مستوى التحكم في تنفيذ المشاريع، من أهمها:

الطريقة الأمريكية (**PERT**) و(**CPM**)، الطريقة الفرنسية (**MPM**) أو (**la méthode des potentiels**)، طريقة (**GRAI**)، (**PETRI**) وغيرهم.

نظرا لأهمية طريقة (**PERT**) على غيرها، سنبدأ أولا في عرض هذه الطريقة ثم نشير بصورة موجزة إلى بعض الطرق الأخرى.

المبحث الأول

طريقة تقيم ومراقبة تنفيذ المشاريع (PERT/CPM)

في هذا الفصل سوف نتعرض لدراسة أحد أهم طرق إدارة ومراقبة تنفيذ المشاريع، ويتعلق الأمر بطريقة (**PERT**).المعنى الاصطلاحي لهذه الكلمة هو: (**Project evaluation And Review Technic**)، أي طريقة تقيم و مراجعة المشاريع، و لهذه الطريقة تكملة تسمى طريقة المسار الحرج أي: (**La méthode du chemin critique** : **C**ritical **P**ath **M**ethod).

تستعمل الطريقتان لتكوين شبكة تنفيذ المشروع وتقدير ومراقبة آجال تنفيذه، تستعمل طريقة **CPM** في الحالة عندما تكون مدد تنفيذ النشاطات معروفة بدقة، بينما يتم اللجوء إلى طريقة **PERT** في حالة معالجة تنفيذ المشاريع التي تكون مدد تنفيذ بعض أو كل نشاطاتها غير محددة بدقة (مدد احتمالية).

إن نظام (PERT/CPM) يعتبر بدون شك النظام الأكثر حداثة وفعالية من ضمن كل طرق بحوث العمليات المعروفة، وظهرت هذه الطريقة إلى الوجود بمناسبة صنع نظام الصواريخ (POLARIS) من طرف مؤسسة الأبحاث الفضائية الأمريكية (NASA) سنة 1954.

ومنذ ذلك الوقت عرفت هذه الطريقة انتشارا كبيرا عند كثير من المؤسسات في ميدان تسير ومتابعة تنفيذ المشاريع الكبرى في النشاطات الاقتصادية المختلفة: بناء العمارات الكبيرة، الجسور والمطارات، مشاريع الصناعات العسكرية، الأعمال الصناعية الكبرى،...،إلخ. فطريقة (PERT/CPM) هي طريقة حديثة موجهة للمساعدة على التحكم في إدارة تنفيذ المشاريع (تخطيط، تنظيم ومراقبة تنفيذها).

من أجل إمكانية استعمال هذه الطريقة يجب توفر شروط عامة هي:

- أن يكون المشروع قابلا للتجزئة إلى نشاطات (**des Activités**) محددة ومستقلة نسبيا.

– معرفة تسلسل تنفيذ هذه النشاطات وترتيبها زمنيا: أي تبعيتها لبعضها البعض في الزمن.

– يجب أيضا معرفة المدة المتوقعة لتنفيذ كل نشاط (سواء بصفة مطلقة أو احتمالية).

إن استعمال طريقة (**CPM – PERT**) يتم وفق المراحل التالية:

I) مرحلة تخطيط المشروع: (تكوين الشبكة الخاصة بتنفيذ المشروع).

هذه المرحلة تتضمن تقسيم المشروع إلى نشاطات مختلفة محددة ومستقلة نسبيا، وتحديد علاقات التتابع المنطقي في التنفيذ بينها (علاقة السابق مع اللاحق في التنفيذ بين النشاطات المكونة للمشروع)، ثم بعد ذلك تحديد المدة الزمنية الضرورية المتوقعة لتنفيذ كل نشاط.

هذه العلاقات بين النشاطات تسمح لنا بجمعها بيانيا في شكل شبكة، هذه الشبكة ككل تعطي تمثيلا بيانيا لنشاطات المشروع ككل ومراحل انجازه.

II) تحديد الخريطة الزمنية (الجدول الزمني) لتنفيذ المشروع:

الغاية من هذا الجدول الزمني هو إظهار بداية ونهاية كل نشاط زمنيا، أي أنه يمكننا من حساب التوقيت المسموح به لبداية ونهاية كل نشاط. بالإضافة إلى أنه في هذه المرحلة سوف نتمكن من معرفة النشاطات الحرجة وغير حرجة، بمعنى تحديد المسار (الخط) الحرج لتنفيذ المشروع. النشاطات الحرجة –كما سنرى في ما بعد– هي التي يترتب على التأخير في تنفيذها تأخير في تنفيذ المشروع ككل.

حساب الجدول الزمني يمكننا –كما سيأتي في ما بعد– من معرفة مقدار الزمن الاحتياطي أو الفائض المتاح لكل الأنشطة التي لا تقع على المسار الحرج.

III) علاقة الزمن بالتكلفة: (تأثير المواد المخصصة لتنفيذ المشروع على مدة تنفيذه).

إذا كانت مدة إنجاز المشروع –المحددة في الجدول الزمني– أخذت الموافقة، فيبدأ تنفيذ المشروع حسب هذا الجدول الزمني، وحسب شبكة التنفيذ في الظروف العادية.

لكن عادة ما تتأثر المدة المتوقعة لتنفيذ المشروع (أو أي نشاط منه) بالموارد الإضافية الممكن توفيرها في تنفيذه: أي يمكن الإسراع في تنفيذ بعض النشاطات في وقت أقل مما كان مخططا نتيجة إضافة موارد أكبر من ما كان مخصصا لها في الظروف العادية.

فيكون مفيدا جدا معرفة درجة الاعتماد هذه بين مدة التنفيذ والموارد المتاحة من أجل حساب إمكانية تسريع تنفيذ المشروع بإضافة موارد إضافية، وتحديد تكلفة هذا التنفيذ السريع للمشروع. فإذا كان مطلوبا الإسراع في تنفيذ المشروع، أي تنفيذه في وقت أقل مما كان مخططا سابقا، فيجب والحالة هذه الإسراع في تنفيذ النشاطات الحرجة (الواقعة على المسار الحرج)، لأنها هي التي تتحكم (تحدد) في زمن تنفيذ المشروع ككل.

IV) مراقبة وتقيم تنفيذ المشروع: (مقارنة المخطط بالمنفذ).

هذه المرحلة في إدارة تنفيذ المشروع تتضمن استعمال الشبكة التي شكلت في المرحلة الأولى والجدول الزمني للتنفيذ في المرحلة الثانية وذلك للحصول على تقرير مدى تقدم (سير) أشغال المشروع في الواقع وذلك بمقارنته بما هو موجود في المخططات.

ويمكن تحديث (تعديل أو تجديد) الشبكة حسب الوضع الحالي واتخاذ القرارات الضرورية في شأن بقية النشاطات إذا تطلبت الظروف ذلك. في حالة ما إذا وقع هناك خلل أو تغيرات في الجدول الزمني (تأخيرات مثلا) فيجب أن تترجم هذه التغيرات في الشبكة وما يترتب على ذلك من تغيرات في المسارات، بالإضافة إلى التغيرات المحتملة في الجدول الزمني.

الفرع الأول: قواعد إعداد وتكوين الشبكة.

أولا: قواعد إعداد الشبكة.

المرحلة الأولى من استعمال طريقة (PERT) كما رأينا تتمثل في توضيح وتحديد كل النشاطات التي يتكون منها المشروع وتمثيلها في مخطط يوضح علاقات التتابع في التنفيذ بينها والمدد الزمنية المتوقعة لتنفيذها، وهذا ما يسمى بالشبكة.

وإن القيام بهذه المرحلة (تكوين شبكة PERT) يخضع لعدة قواعد وطرق سنذكرها لاحقا، لكن قبل ذلك سنتعرض لأهم المصطلحات المستخدمة، التي من أهمها:

1- أهم المصطلحات والمفاهيم المستعملة في تكوين الشبكة:

المشروع (Projet): هو مجموعة من النشاطات المختلفة المتسلسلة بحيث لا يبدأ تنفيذ بعضها إلا عند الانتهاء من تنفيذ البعض الآخر، أي أن النشاطات تنفذ في تسلسل منطقي يخضع لطبيعة المشروع والأجزاء المكونة له.

النشاط (Activité): هو جزء من المشروع ويتكون من مجموعة من **العمليات (opérations)** المنظمة التي يجب القيام بها، بحيث يتطلب وقتا لإتمامه وتصريف أموال (إمكانيات ووسائل). في شبكة (PERT) النشاط يمثل بقوس (سهم) وعلى هذا القوس عادة ما يكتب مدة تنفيذ هذا النشاط أي الوقت المتوقع لتنفيذه، وطبيعة هذا النشاط:

مثلا :

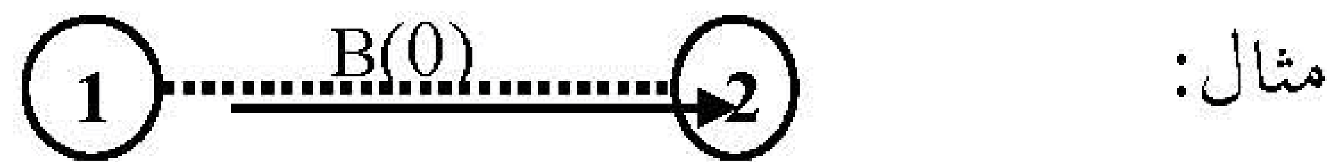


بحيث (**A**): هو اسم النشاط (مثلا الطلاء الخارجي لبناية، حفر الأساس، تركيب شبكة الكهرباء ،...) والرقم المكتوب بجوار (A) وهو الرقم (**6**) يشير إلى الوقت اللازم لتنفيذ هذا النشاط (مثلا **6** أسابيع، **6** أشهر،....إلخ).

هذا النشاط يبدأ من الحادث 1 وينتهي عند الحادث 2 (سنوضح لاحقا ما هو المقصود بالحادث). اتجاه السهم يمثل الاتجاه الزمني في تنفيذ النشاط، والسهم الذي يبين فقط تبعية نشاط ما لآخر يسمى بالسهم الوهمي، والنشاط الذي يمثله يسمى بالنشاط الوهمي.

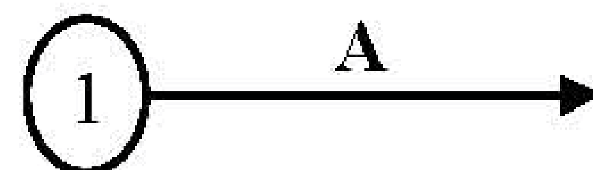
هذا النشاط الوهمي لا يستهلك أموالا ولا يستغرق وقتا زمنيا لتنفيذه، فهو غير موجود في الواقع وإنما يستعمل لتجاوز بعض الإشكاليات التي تنشأ في إعداد الشبكة، وسوف نشير لاحقا إلى الهدف من استعمال النشاطات الوهمية في تكوين الشبكة. النشاط الوهمي عادة ما يمثل في الشبكة بسهم متقطع.

مثال:

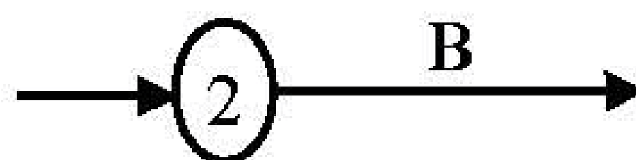


الحادث (**évènement**): نقطة النهاية والبداية الزمنية للنشاط تسمى بالحادث، والحادث هو نقطة زمنية لا تستغرق وقت (أي ليس له مدة زمنية)، وهي تميز بداية نشاط ما، بداية نشاط ونهاية نشاط آخر، أو نهاية نشاط فقط. الحادث يعبر عليه في شبكة (PERT) بدائرة وبداخلها رقم هو رقم الحادث.

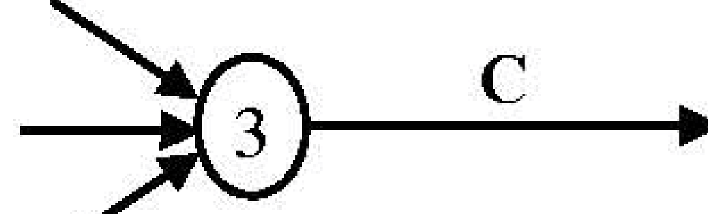
مثال: الحادث **1** يميز بداية (انطلاق) النشاط **A**:



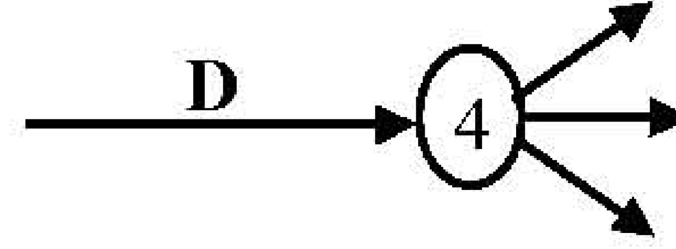
الحادث **2** يميز بداية النشاط **B** ونهاية النشاط الذي يسبقه.



الحادث **3** يميز نهاية مجموعة من النشاطات وبداية النشاط **C**



الحادث **4** يميز هنا نهاية نشاط ما **D** مثلا وبداية مجموعة من النشاطات الأخرى:



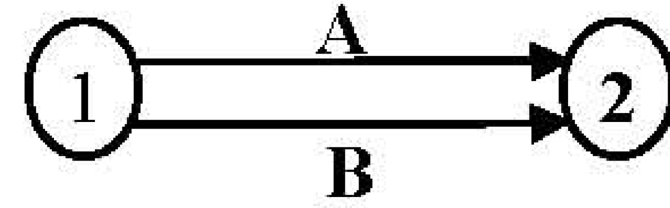
2- قواعد إعداد الشبكة:

أ- قبل أن يبدأ أي نشاط يجب أن تنتهي كل النشاطات السابقة له.

ب- القوس يوضح فقط منطق الأولوية، أي أولوية التتابع في تنفيذ النشاطات، فطول السهم واتجاهه ليس لهما أي تأثير على إجراءات إعداد الشبكة، فطول السهم مثلا ليس متناسبا مع طول المدة الزمنية الضرورية لتنفيذ النشاط.

ت- لا يمكن لحادثين مختلفين أن يجمعهما أكثر من قوس، بمعنى لا يمكن أن يجمعهما أكثر من نشاط، بعبارة أخرى: لا يمكن لنشاطين أو أكثر مختلفين أن تكون لهما نفس البداية ونفس النهاية.

مثال: خطأ

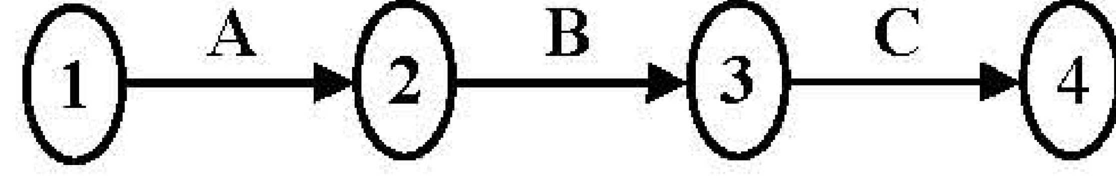


ث- أرقام الحوادث لا يمكن أن تتكرر داخل الشبكة.

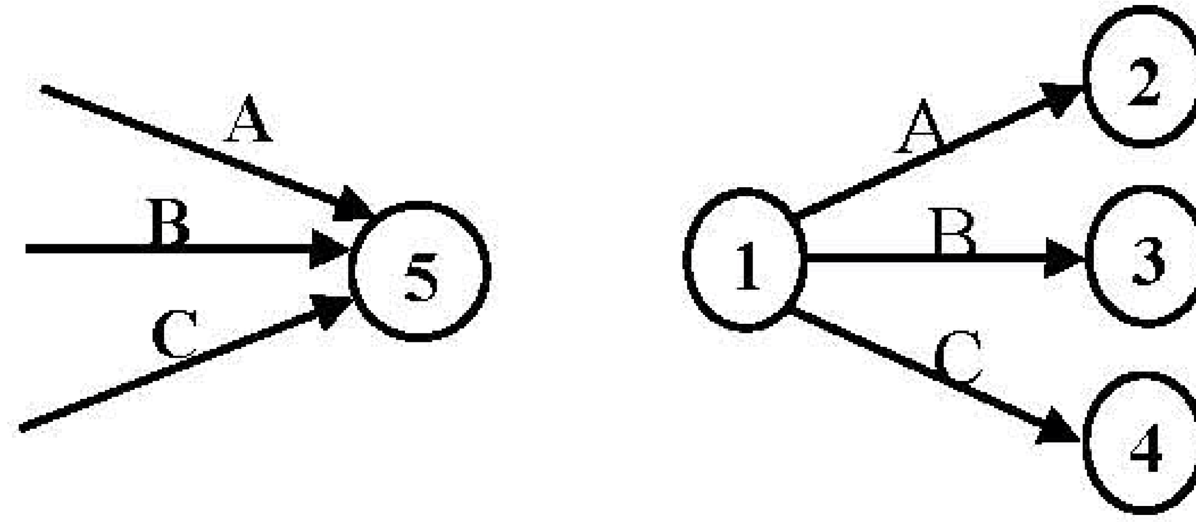
ج- لكل شبكة لا يمكن أن يكون إلا حادث ابتدائي واحد وحادث نهائي واحد.

ح- النشاطات إما أن تكون متتالية في تنفيذها ويرمز إليها كالتالي:

7



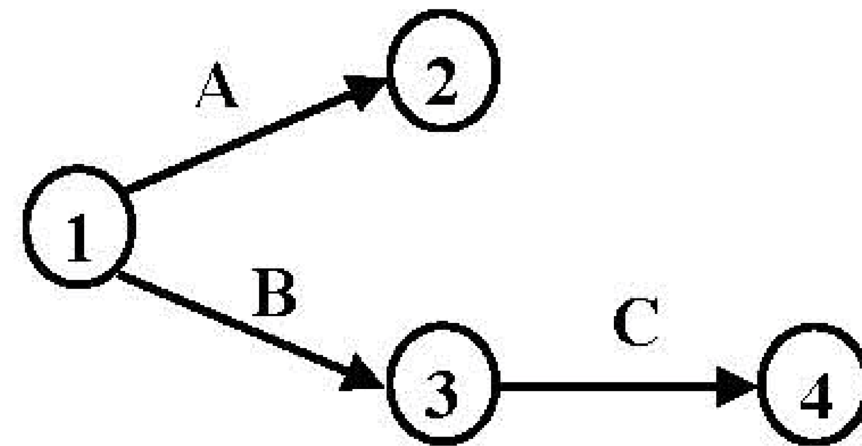
وإما أن تبدأ مع بعض (تنطلق من نفس الحادث)، أو أن تنتهي مع بعض (أي تنتهي عند نفس الحادث). مثل:



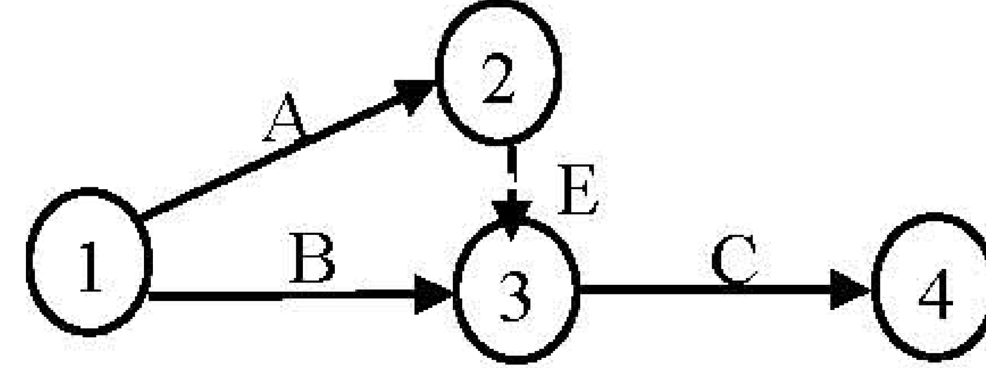
هنا يجب الملاحظة أن انتهاء النشاطات (**A**,**B**,**C**) عند نفس الحادث **5** لا يعني أنها متساوية زمنيا أو تنتهي في نفس الوقت، بل يعني فقط أنه لا يمكن لأي نشاط يأتي بعدها أن يبدأ إلا بعدما تنتهي كل هذه النشاطات.

خ – النشاط الوهمي: كما أشرنا إليه سابقا هو النشاط الذي لا يتطلب لتنفيذه لا أموال ولا وسائل ولا وقت، فهو نشاط نضطر إلى استعماله في تكوين الشبكة فقط لإبراز تبعية نشاط ما في تنفيذه للانتهاء من تنفيذ نشاط آخر سابق له.

مثال: إذا كانت لدينا الشبكة الجزئية التالية، نرى هنا أن النشاط C لا يتوقف في تنفيذه على الانتهاء من تنفيذ النشاط (A)، بل يتوقف على الانتهاء من(B) فقط.



ولكن إذا أردنا أن نجعل النشاط (C) يتوقف في تنفيذه على الانتهاء من تنفيذ النشاطين السابقين له (B,A) مع بعض فما علينا إلا أن نضيف النشاط الوهمي (E) كالتالي:

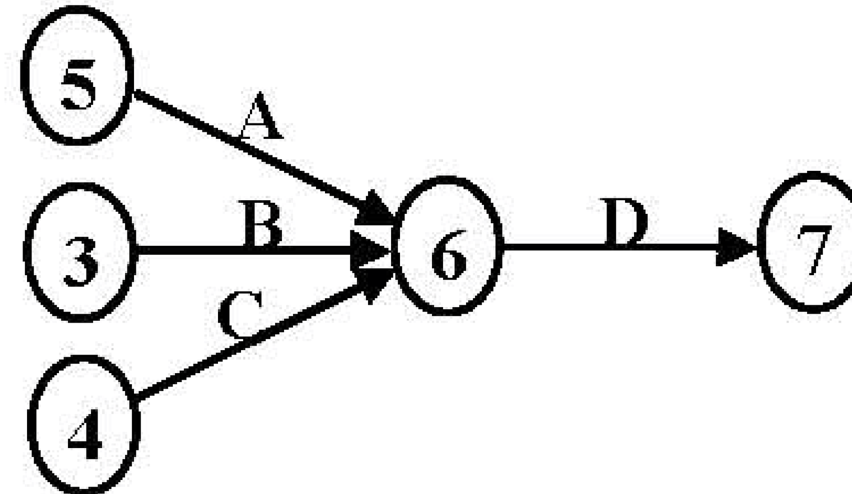


بحيث أن السهم المتقطع الذي ينطلق من الحادث **2** وينتهي عند الحادث **3** يرمز إلى هذا النشاط الوهمي، وهو يعني أن النشاط (C) لا يبدأ حتى ينتهي النشاطان (B,A).



شرح قواعد إعداد الشبكة:

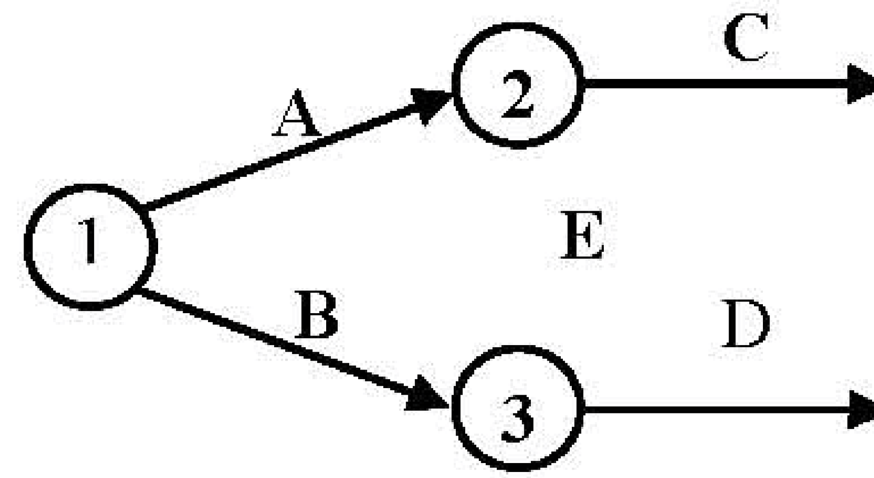
ليكن لدينا الشبكة الجزئية التالية:



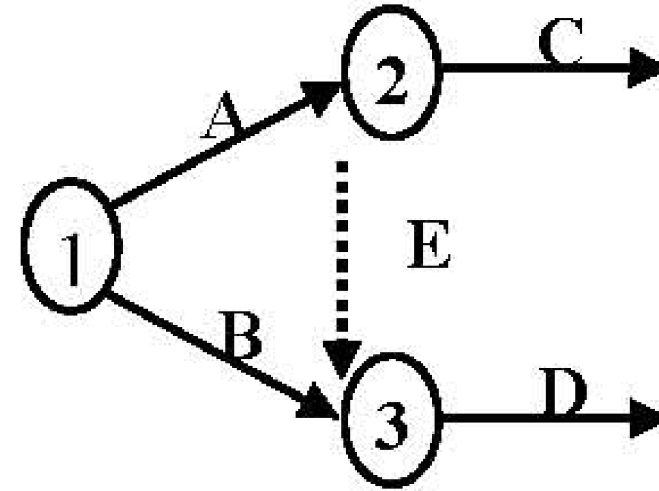
حسب القاعدة الأولى والسادسة، هذا المخطط (الشبكة) يبين أنه لا يمكن للنشاط (D) أن يبدأ حتى تنتهي النشاطات (C,B,A)، ولكن في نفس الوقت يجب الملاحظة أن هذا لا يعني أن هذه النشاطات يلزم أن تنتهي في نفس الوقت (بمعنى تساوي الأسهم الممثلة للنشاطات المختلفة في الرسم لا يعني تساوي مدة

إنجاز هذه النشاطات). يجب الملاحظة أيضا أن الحادث **5** يعني بداية النشاط (A) ولكن الحادث **6** يعني نهاية النشاطات (C,B,A) وبداية النشاط (D).

إن الشبكة الجزئية التالية تعني أن النشاط (C) لا يبدأ حتى ينتهي (A) وأن (D) لا يمكن أن يبدأ حتى ينتهي (B) ولا علاقة لـ (C) و(A) بـ (D).

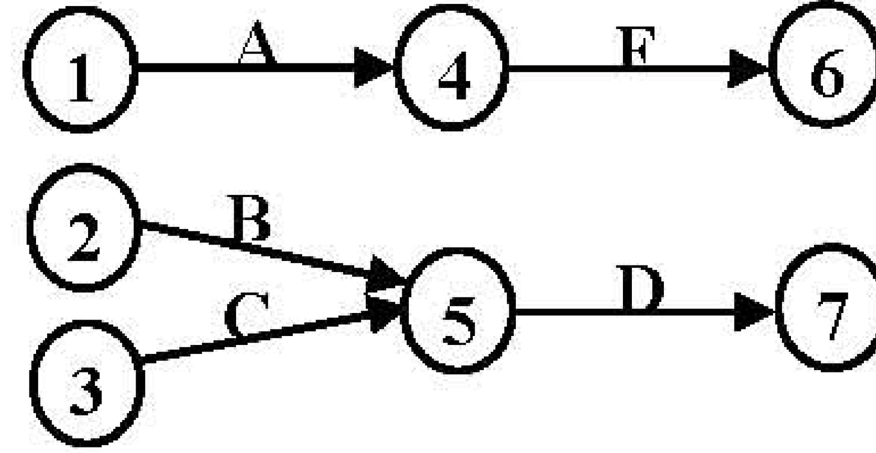


أما إذا غيرنا هذه الشبكة تغيرا طفيفا كالتالي:

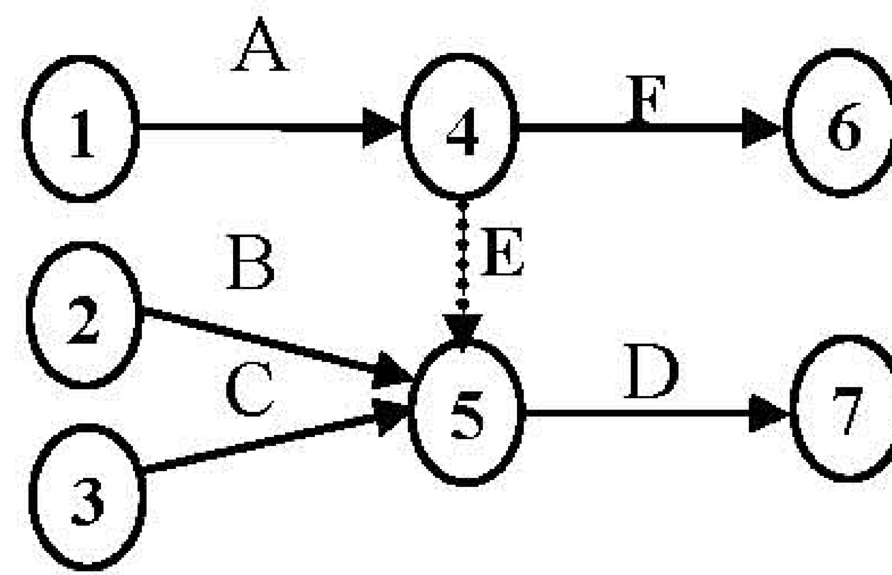


فإن منطق التتابع سوف يختلف ويصبح معناه كالتالي: النشاط (D) يتوقف في تنفيذه ليس فقط على الانتهاء من النشاط (B) ولكن أيضا على النشاط (A): أي أنه لا يبدأ حتى ينتهي (B, A)، وتبعية (D) في تنفيذه لـ (A) عبرنا عليها بإضافة النشاط الوهمي (E).

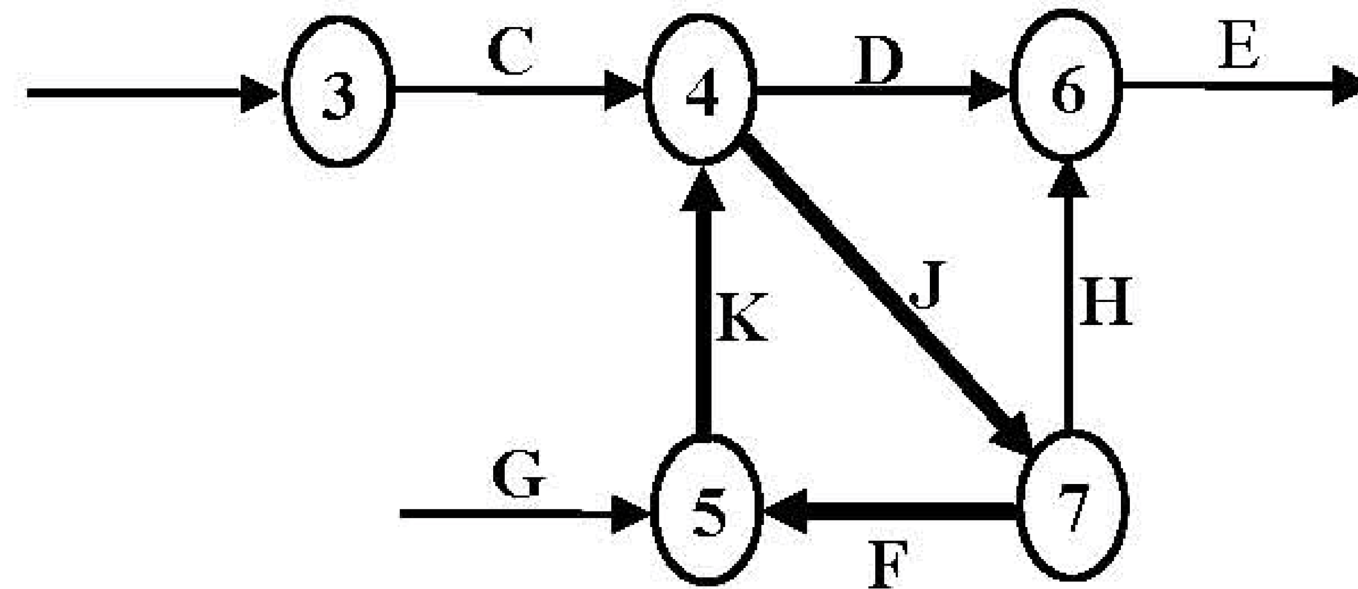
نفترض أن النشاط (D) يتوقف في تنفيذه على النشاطين (C,B) وتنفيذ النشاط (A). ونفترض أيضا أن تنفيذ النشاط (F) لا يتوقف لا على (C,B) ولا على (D) بل يتوقف على تنفيذ النشاط (A) فقط كالتالي:



من أجل تكوين شبكة صحيحة لهذه الحالة يلزم إنشاء نشاط وهمي (E)، النشاط الوهمي هنا يستعمل لتوضيح التبعية الجزئية في تنفيذ النشاط (D) للنشاط السابق له وهو (A) كالتالي:



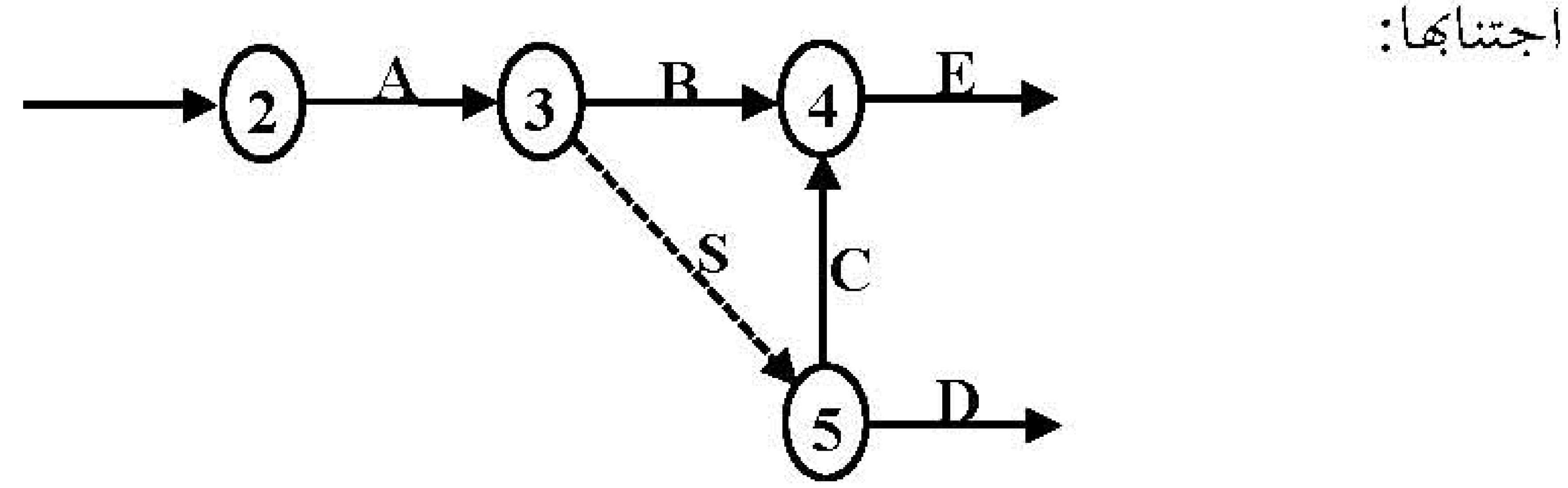
نفترض أنه لدينا الشبكة الجزئية التالية:



نلاحظ أن الأنشطة (K ,F ,J) تشكل في ما بينها حلقة مغلقة، هذه الحلقة تبين تناقض في منطق التتابع بين النشاطات المشكلة لها، وهذا يعني أن هناك علاقة أو علاقات للتتابع في التنفيذ غير صحيحة.

نلاحظ أن النشاط (J) لا يمكن أن يبدأ في تنفيذه إلا عندما تنتهي (K,C)، ولكن (K) يتوقف على (F) الذي يتوقف بدوره على (J)، وهكذا فإن النشاط (J) لا يمكن أن يبدأ لأنه يتوقف في تنفيذه على نفسه. بالرغم من أنه في بعض الأحيان وفي بعض مراحل تكوين الشبكة يجب الاستعانة بالنشاطات الوهمية، يلزم في مقابل ذلك اجتناب الاستعمال المفرط لمثل هذه النشاطات.

المثال التالي يوضح حالة الاستعمال غير الضروري لنشاط وهمي والتي يلزم اجتنابها:



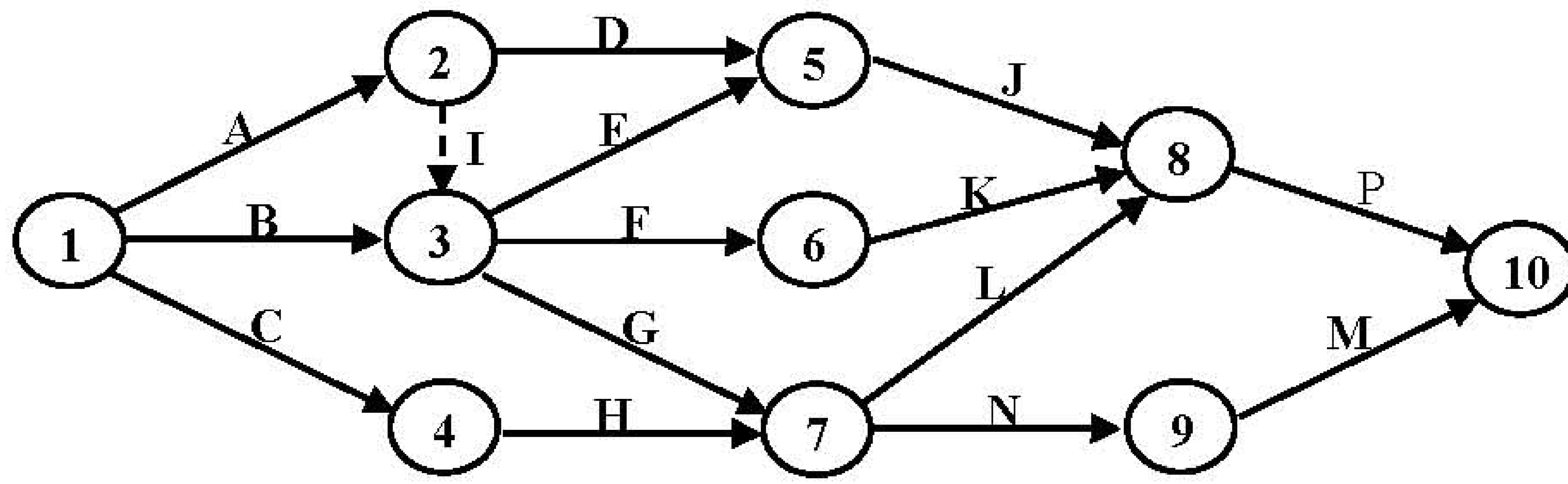
واضح أن تنفيذ النشاط (D) يتوقف على تنفيذ النشاطات (C,B,A)، فتبعية (أسبقية) النشاط (D) لـ (A) واضحة بدون اللجوء إلى النشاط الوهمي (S) الذي هو في هذه الحالة غير ضروري.

(*) يجب التنبيه أن معرفة هذه القواعد والطرق غير كاف لتكوين شبكة دقيقة وحيدة لأي مشروع، فمعرفة هذه الطرق والقواعد يلزم تكميلها بمعرفة جيدة لخصوصيات المشروع وخبرة في استعمال طريقة PERT فهذه القواعد تتميز بمرونة كبيرة في استعمالها وتفسيرها وبالتالي يلزم على مستعملها أن يكون على دراية كبيرة بخصوصيات استعمالها.

تمارين على قواعد إعداد الشبكة

تمرين1:

لتكن الشبكة التالية الممثلة لمراحل تنفيذ مشروع معين.



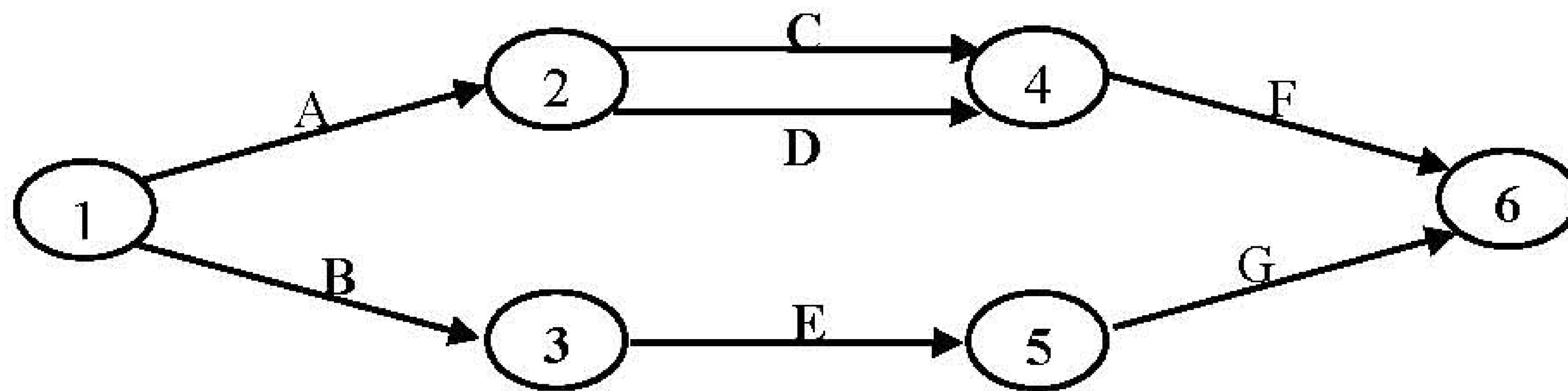
أ- بين النشاطات التي يجب أن تنفذ حتى يبدأ تنفيذ النشاط (J).

ب- استخرج من هذه الشبكة:

النشاطات التي تنتهي عند نفس الحادث والنشاطات التي تبدأ مع بعض.

تمرين2:

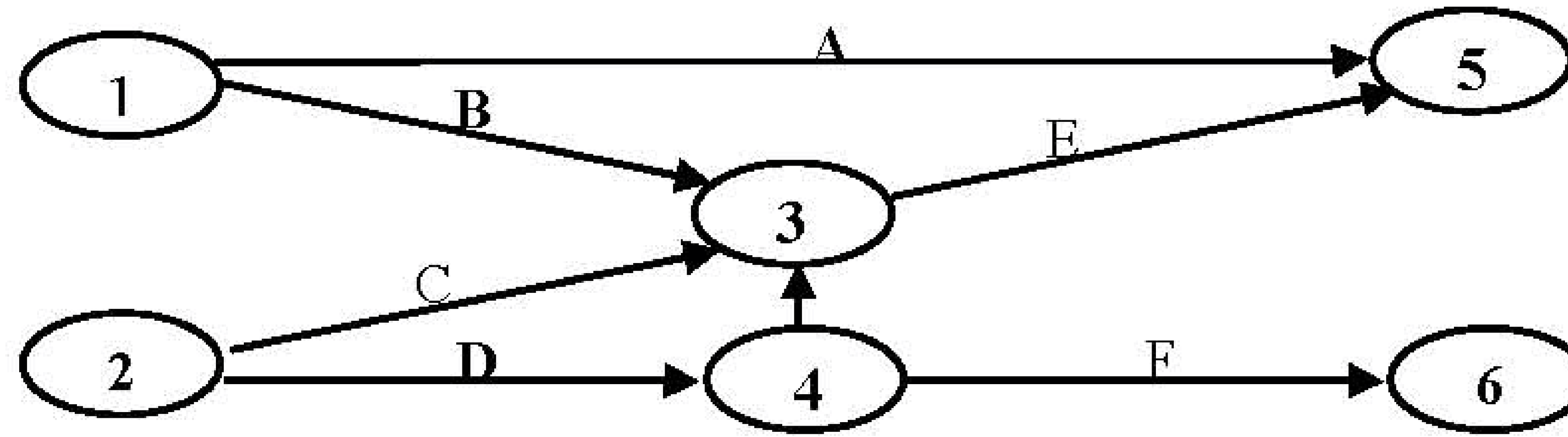
ما هو الخطأ في تكوين هذه الشبكة.



الجواب: النشاطين D , C

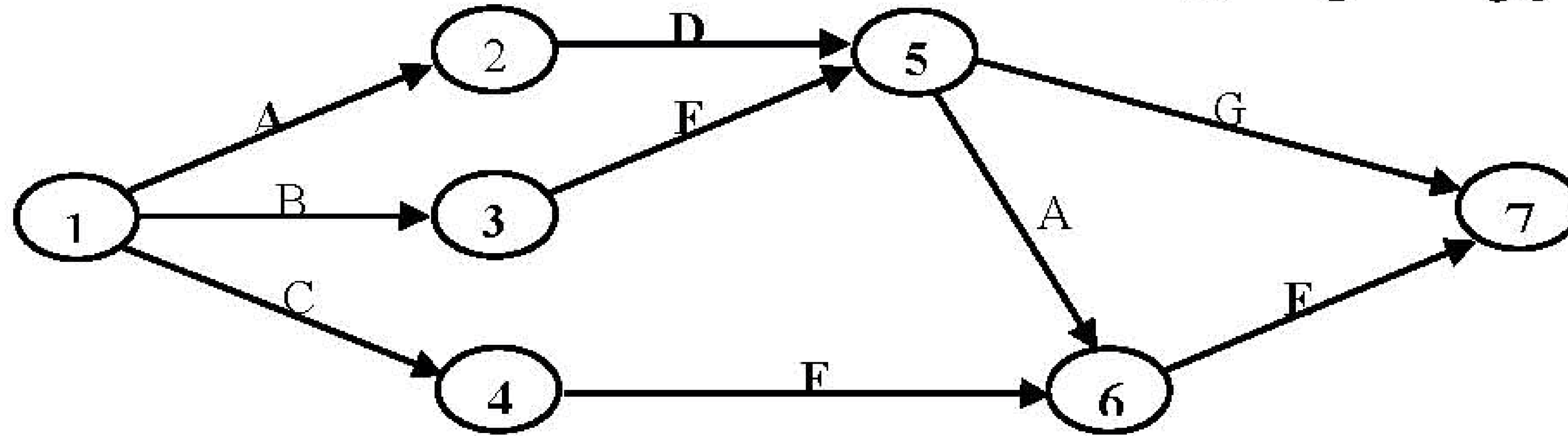
تمرين3:

نفس السؤال السابق.



الجواب: تعدد البداية والنهاية وعدم تسمية النشاط (**3 – 4**).

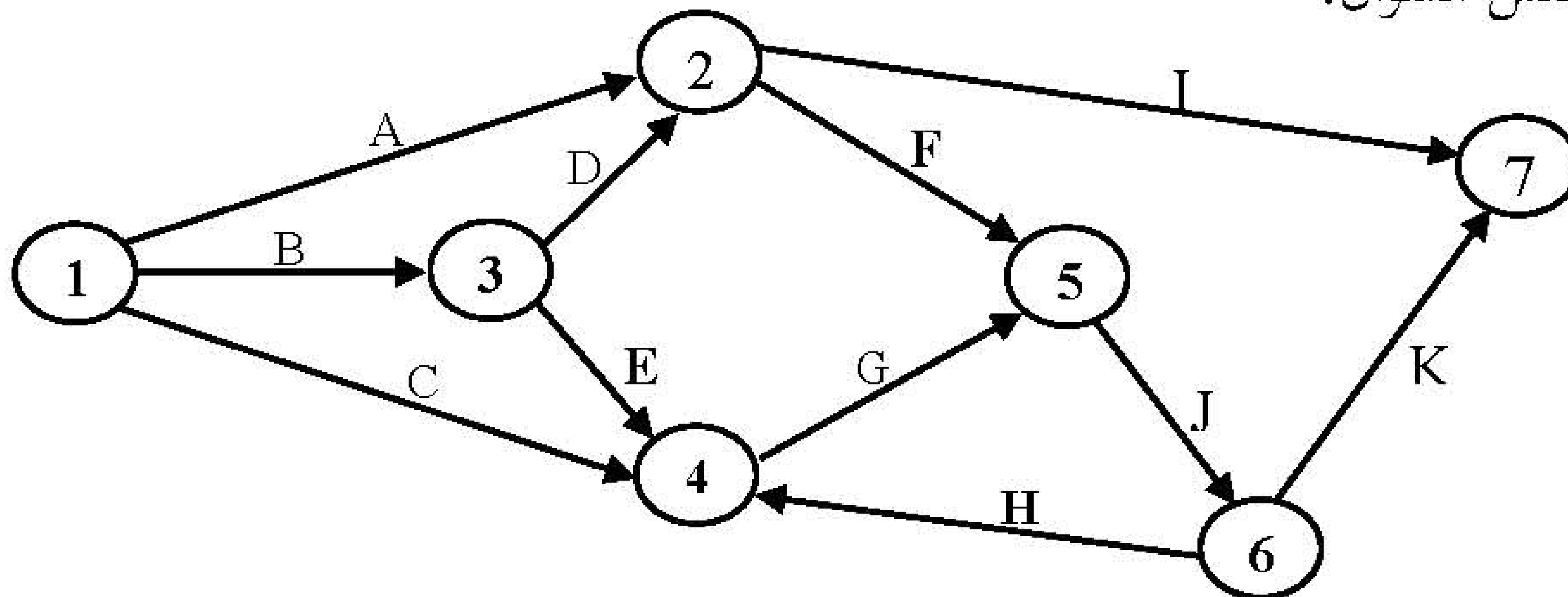
تمرين4: نفس السؤال.



الجواب: النشاطين **E** , **A** مسمى مرتين.

تمرين 5:

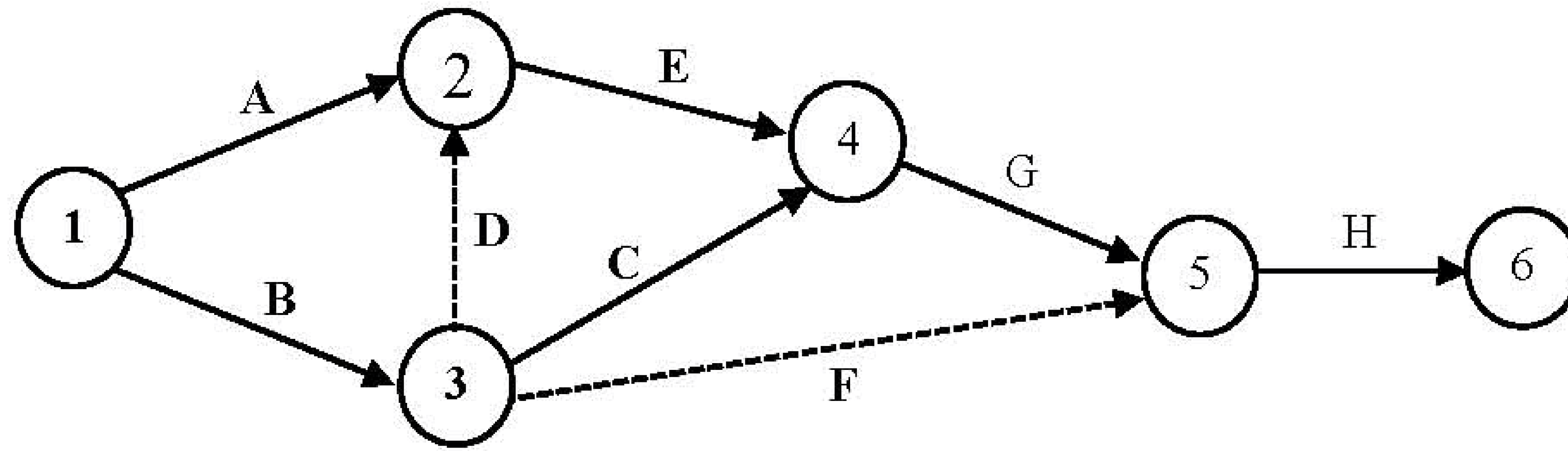
نفس السؤال.



الجواب: وجود حلقة بين النشاطات G , J , H.

تمرين6:

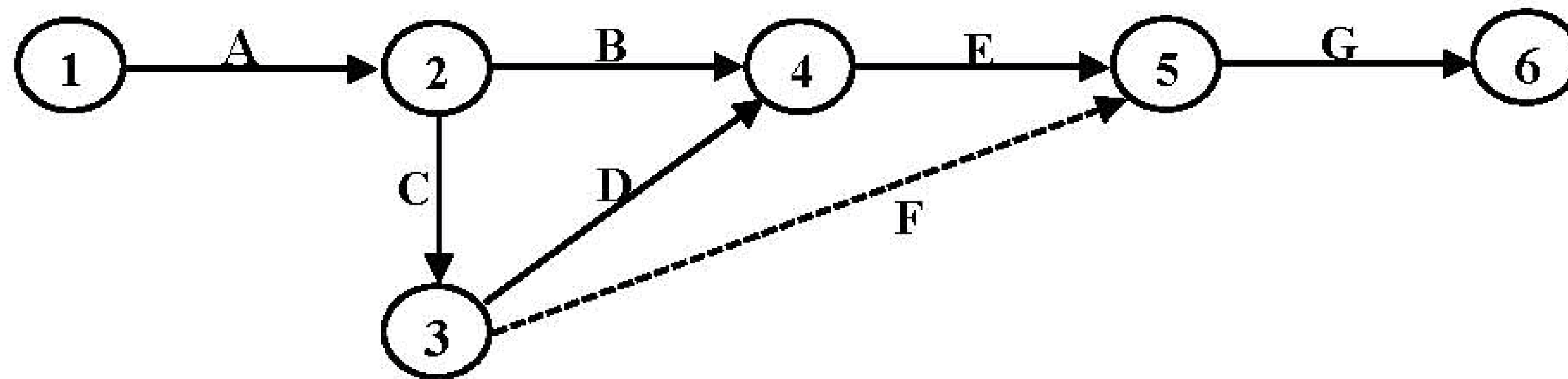
هناك نشاطين وهميين في هذه الشبكة هما (F,D) أيهما غير ضروري.



الجواب: النشاط (F) **غير ضروري، أما** النشاط (D) فيعتمد على وجود العلاقة بين **B** , **E**.

تمرين7:

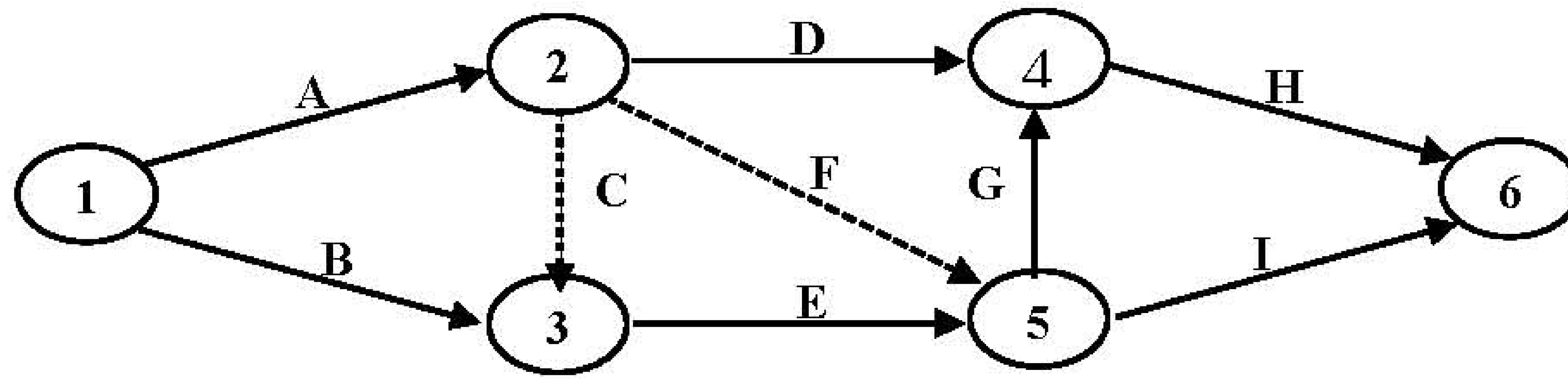
هل النشاط الوهمي (F) ضروري لتكوين الشبكة التالية أم لا:



الجواب: غير ضروري.

تمرين8:

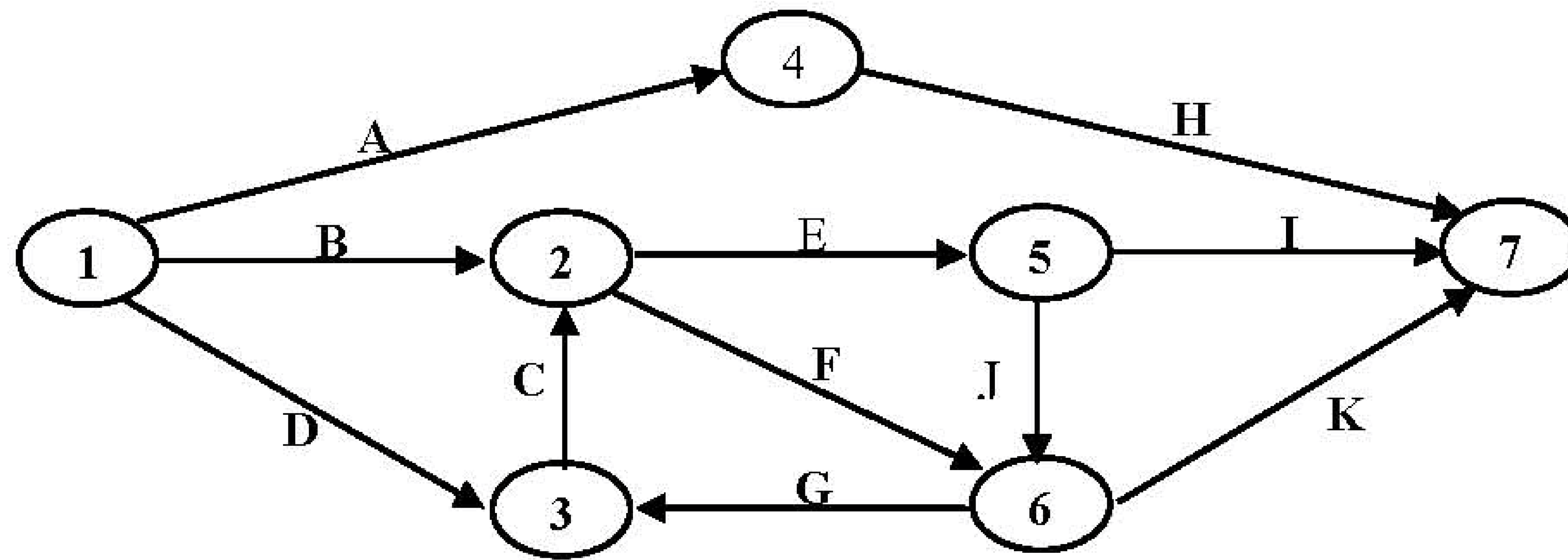
أي النشاطين الوهميين (C,F) غير ضروري.



الجواب: كلاهما غير ضروري.

تمرين9:

ما هي العلاقات التتابعية في التنفيذ غير الصحيحة في هذه الشبكة.



الجواب: الحلقة المزدوجة– E,J,G,C – F, G , C .

ثانيا: تكوين الشبكة.

بعد معرفة أهم المصطلحات، التعاريف والقواعد الخاصة بتكوين الشبكة، نتعرض في ما يلي إلى تكوين شبكة إنجاز المشروع، والشبكة هي عبارة عن تمثيل بياني لمراحل تنفيذ المشروع في مجمله حيث يعبر فيها عن كل نشاط بسهم، ويفصل هذه الأسهم حوادث زمنية.

من أجل تكوين الشبكة يلزم تكوين قائمة بالنشاطات الضرورية لتنفيذ المشروع وتحديد علاقات التتابع في تنفيذ هذه النشاطات، إبتداءا من النشاطات التي يبدأ بها المشروع إلى النشاطات التي ينتهي بها (يعني تحديد العلاقة التسلسلية في تنفيذ النشاطات المختلفة).

سوف نوضح كيفية تكوين شبكة (**PERT**) من خلال الأمثلة التالية:

مثال 1: لدينا مشروع يتمثل في تخطيط وتنفيذ دراسة لحالة سوق منتج معين.

1– نقوم بتحديد النشاطات التي يتكون منها المشروع وضبط علاقة التتابع بينها أي علاقة التسلسل في التنفيذ.

– نفترض أن المشروع يبدأ من قيام المسؤولين على الدراسة على تحديد أهدافها العامة، الجدوى منها والفوائد المتوخاة منها (النشاط نسميه A).

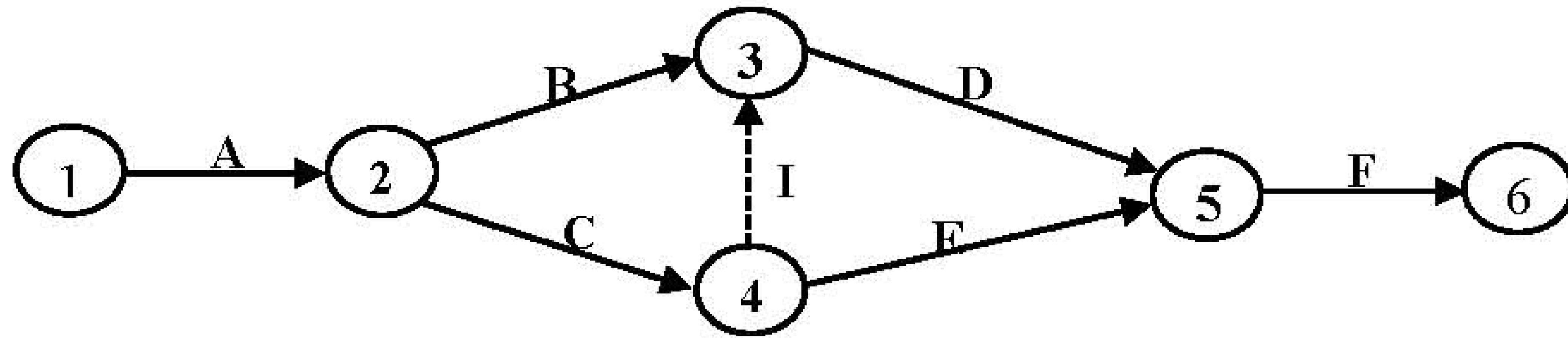
– بعد هذا النشاط يمكن أن يبدأ المسؤولون في تنفيذ إجراءات توظيف الموظفين الذين يقومون بجمع المعلومات (المحققين) (النشاط B)، وفي نفس وقت انطلاق عملية التوظيف تبدأ عملية إعداد الاستمارة (**le Questionnaire**) التي تملأ من طرف عينات المستهلكين المستهدفين (النشاط C).

– بعد عملية التوظيف وإعداد الاستمارة يبدأ تدريب الموظفين (المحققين) على استعمال وملأ هذه الاستمارة (النشاط D).

– بعد إعداد الاستمارة يقوم المسؤولون باختيار عينات فئات المستهلكين المستهدفين التي يشملها التحقيق (خصائص هذه العينات، عاداتهم الاستهلاكية، عدد أفراد عائلتهم، تركيبتها البشرية،...،الخ) (النشاط E).

– بعد اختيار العينات المستهدفة وبعد أن يكون المحققون قد أنهوا تدريبهم يمكن إنجاز التحقيق في الميدان وإجراء تحليل نتائجه(النشاط F).

2– بعد أن حددنا النشاطات وعلاقاتها ببعضها يمكن الآن تكوين الشبكة الخاصة بهذا المشروع كالتالي:



مثال 2: في مصنع ما يعمل عشرة عمال وكل واحد منهم مكلف بتنفيذ نشاط يساهم في إنتاج منتج معين. علاقات التتابع في تنفيذ هذه النشاطات هي كالتالي:

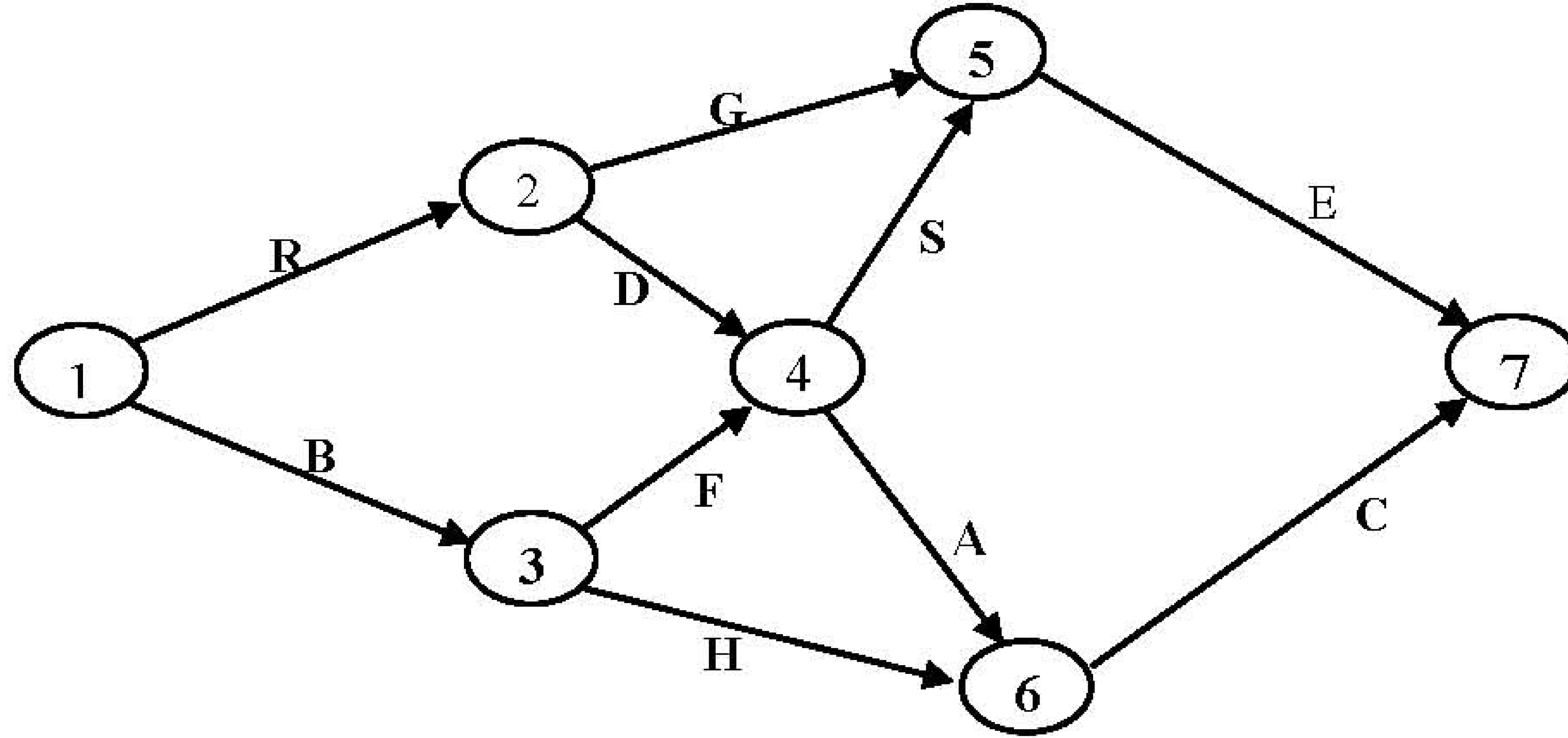
- العامل المكلف بتنفيذ النشاط,,, **(F)** ,يستطيع البدء بعد تنفيذ,, **(B)**.
- " " " " **(C)** " " " " **(H,A)**.
- " " " " **(G)** " " " " **(R)**.
- " " " " **(E)** " " " " **(G,S)**.
- " " " " **(S)** " " " " **(D,F)**.
- " " " " **(D)** " " " " **(R)**.
- العامل المكلف بتنفيذ النشاط **(H)** يستطيع البدء بعد تنفيذ النشاط **(B)**.

النشاط (R) لا يوجد قبله نشاط آخر.

- العامل المكلف بتنفيذ النشاط (A) يستطيع البدأ بعد تنفيذ النشاط (D,F).
- النشاط (B) لا يوجد قبله نشاط آخر.

الحل:

قبل أن نبدأ في تكوين الشبكة نحدد النشاطات الابتدائية ونشاطات نهاية المشروع. بملاحظة المعطيات السابقة نستنتج أن النشاط (B,R) هما النشاطان اللذان يبدأ بهما المشروع. ونشاطات النهاية هما (C,E)، ثم نكون الشبكة كالتالي:

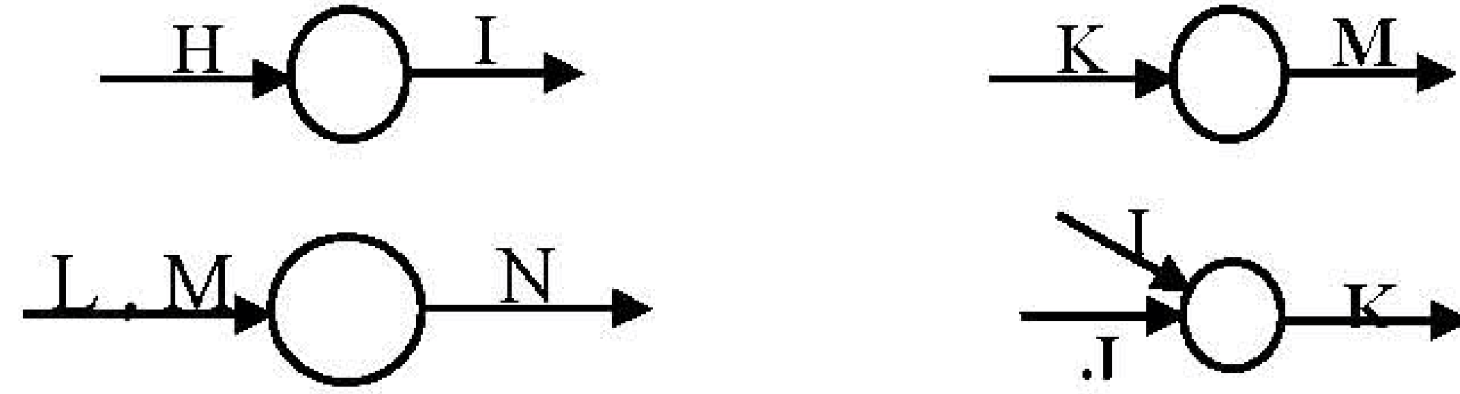


مثال 3: كون شبكة المشروع التالي مستعملا أقل عدد ممكن من النشاطات الوهمية.

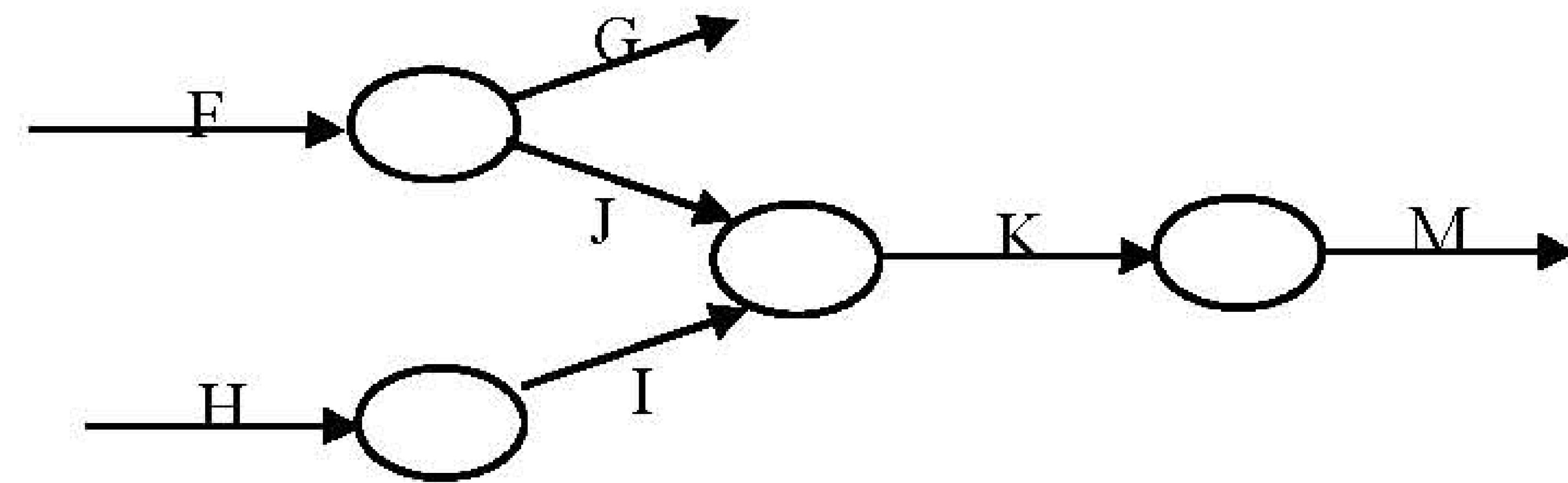
N	M	L	K	I	J	G	النشاط
L, M	K	E,D,G	I , J	H	F	F	النشاط السابق له مباشرة

الحل: نحاول أن نكون الشبكات الجزئية لهذا المشروع ثم نجمعهم:

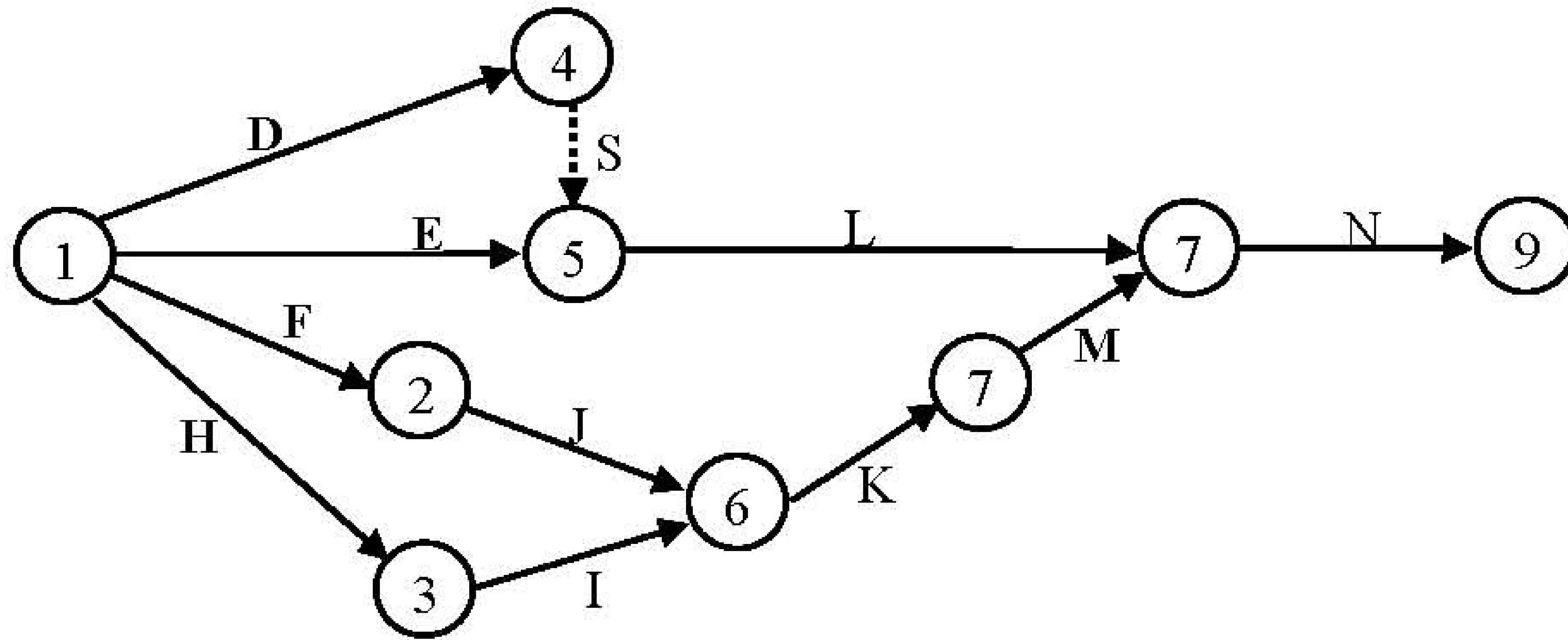




بالملاحظة نستطيع التوصل إلى الشبكة الجزئية التالية:



وهذا يقودنا إلى الرسم النهائي للشبكة كالتالي:



مثال 4: مشروع ما يتكون من نشاطات معينة، العلاقات التتابعية في التنفيذ بينها كالتالي:

النشاطات (C,B,A) يبدؤون مع بعض.

يبدأ النشاط (D) بعد الانتهاء من (A).

النشاطات (E),(F),(G) يبدؤون بعد الانتهاء من (B,A).

النشاط (H) يبدأ بعد الانتهاء من (C).

النشاط (J) يبدأ تنفيذه على إثر الانتهاء من (E,D).

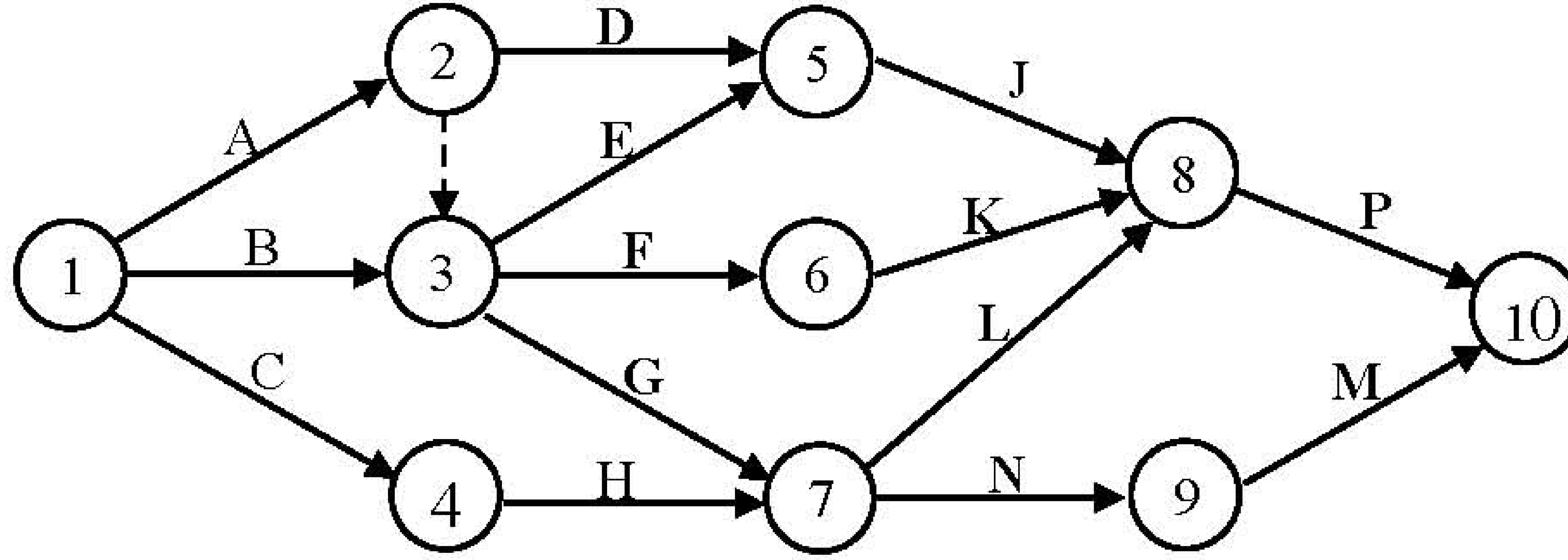
النشاط (K) يبدأ تنفيذه بعد الانتهاء من (F).

النشاطين (N,L) يبدأ تنفيذهما عند الانتهاء من (H,G).

النشاط (M) ينطلق تنفيذه بعد الانتهاء من (N).

النشاط (P) يبدأ تنفيذه عندما ينتهي تنفيذ (L,K,J).

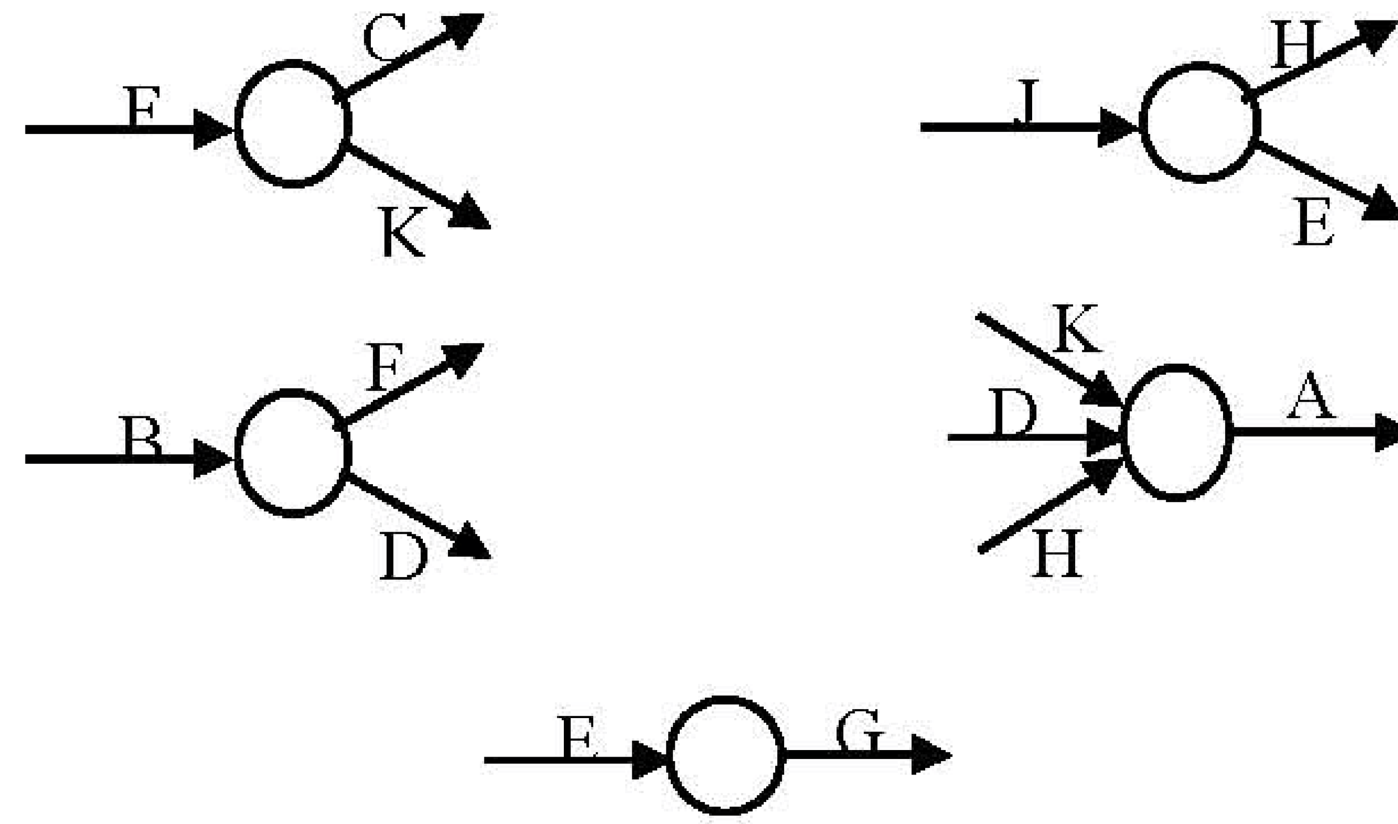
الحل:



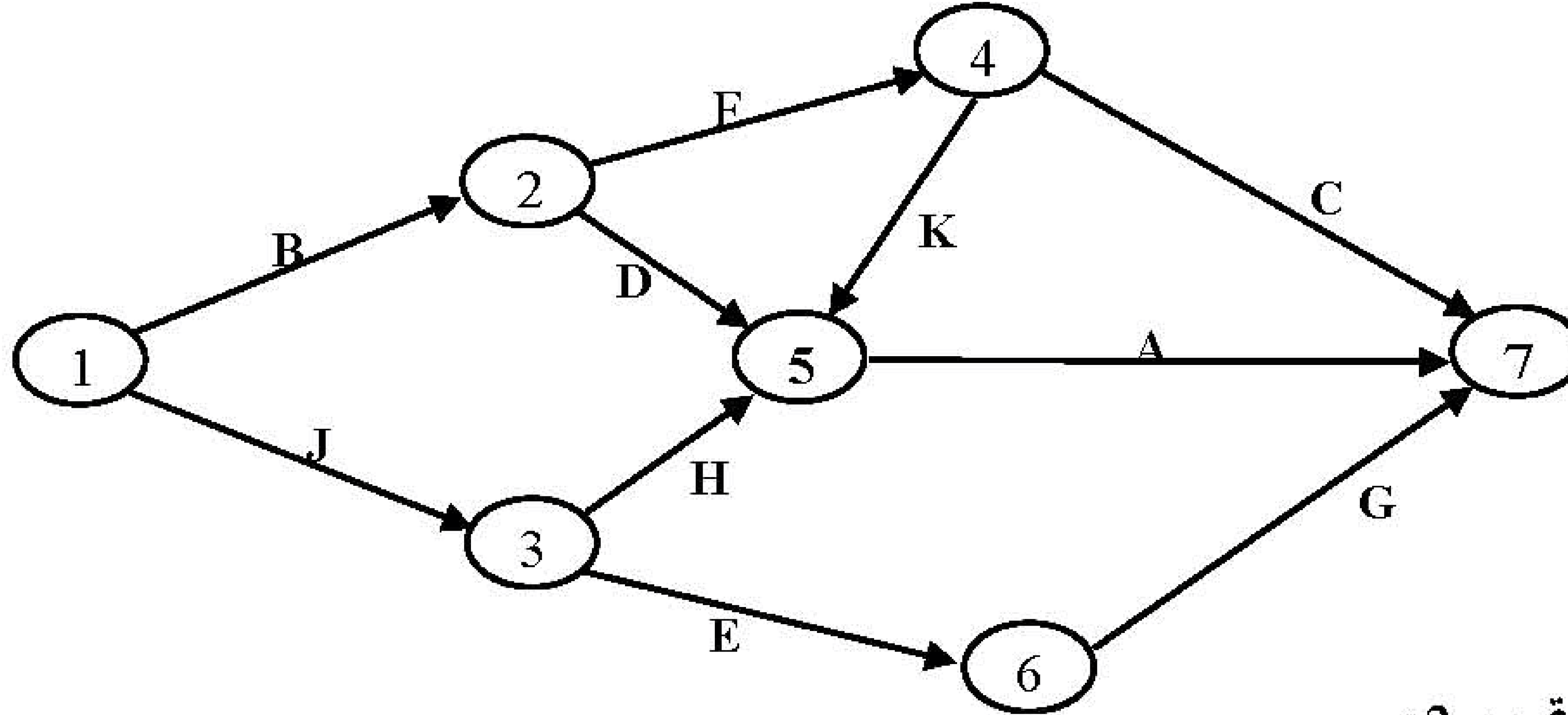
تمارين

تمرين 1:

باستعمال الشبكات الجزئية التالية، كون شبكة (PERT) المناسبة.



الحل: نبدأ برسم النشاطات الابتدائية والنهائية ثم نوصل النشاطات الأخرى بها.



تمرين 2:

الجدول التالي يبين النشاطات المكونة لمشروع ما ومنطق التتابع بينها.

- كون الشبكات الجزئية لهذه النشاطات.

- جمع هذه المخططات الجزئية في شبكة واحدة.

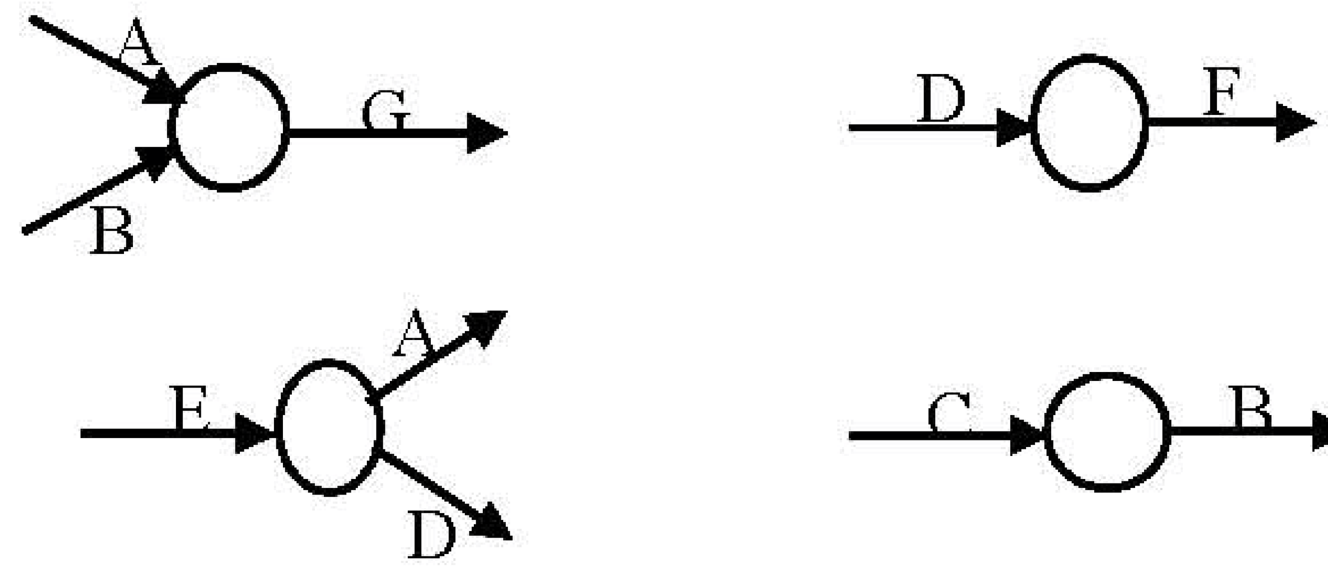
B	C	D	F	E	G	A	النشاط
C	--	E	D	--	A,B	E	النشاط السابق له مباشرة

الحل :

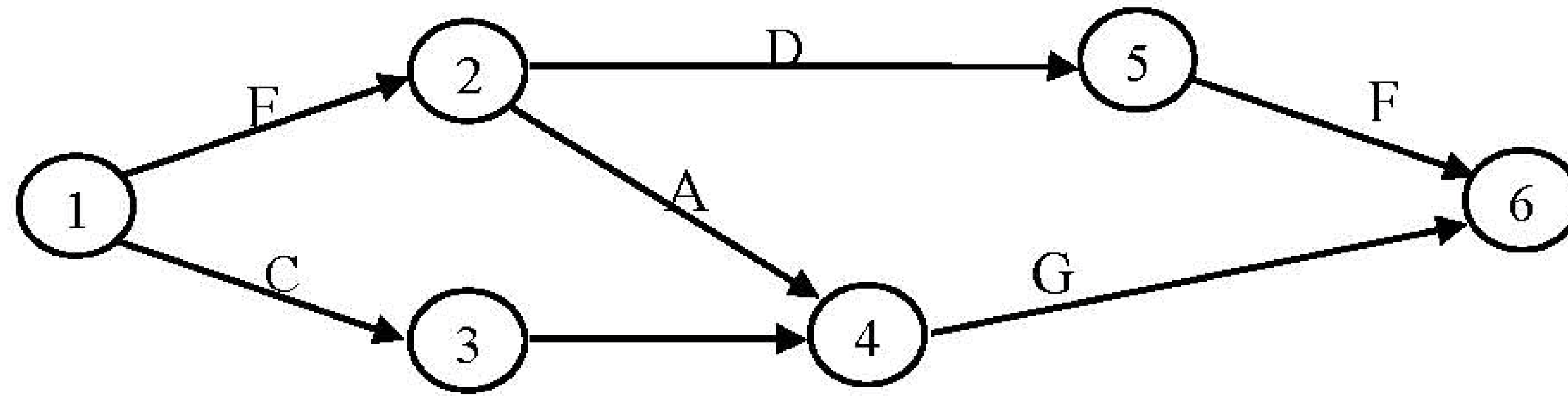
النشاطات الابتدائية: (**E** , **C**)

النشاطات النهائية: (**G** , **F**)

المخططات الجزئية:



والشبكة هي:



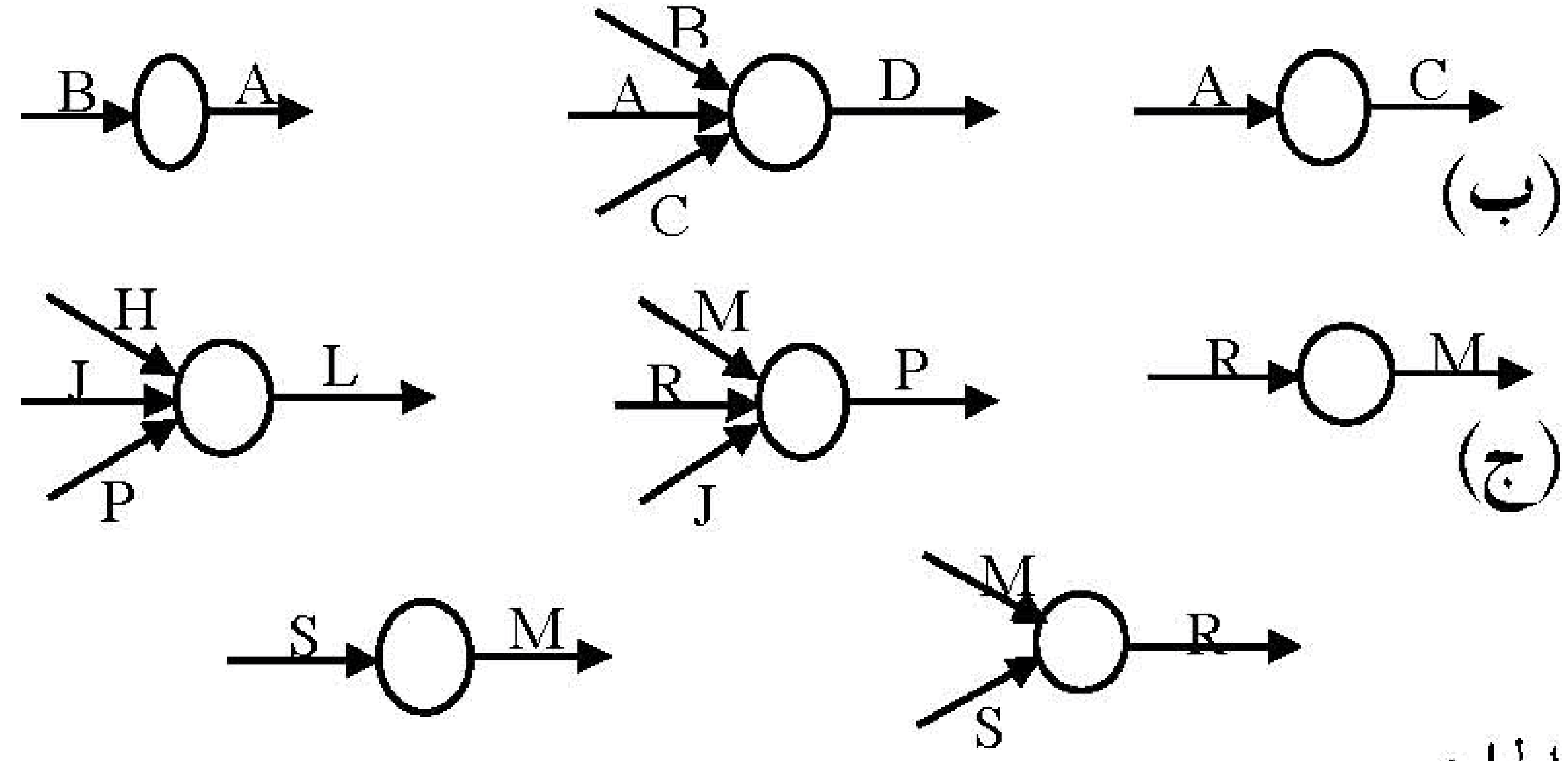
تمرين 3:

الشبكات الجزئية التالية توجد بينها عدة تناقضات.

المطلوب :

- إظهار هذه التناقضات وتوضيحها.
- تجميعها في مخططات جزئية.

(أ)

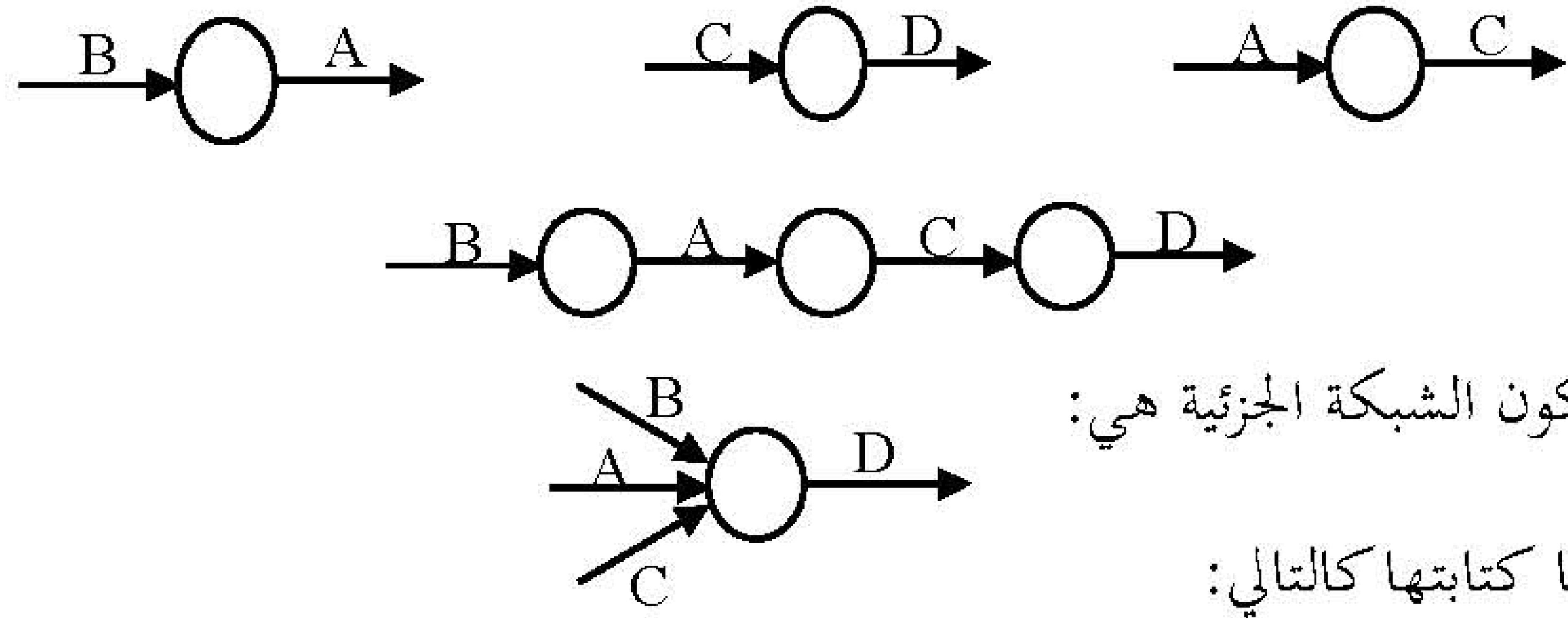


الحل:

أ– إذا كان النشاط (**B**) يسبق (A) فإن (**B,A**) لا يمكن أن ينتهيا في مع بعض عند (**D**).

وأيضا إذا كان (**A**) يسبق (**C**) فإن (**C,A**) لا يمكن أن يصبا معا في (D).

والصحيح هو: أننا نستطيع كتابة المخططات الجزئية السابقة كالتالي:

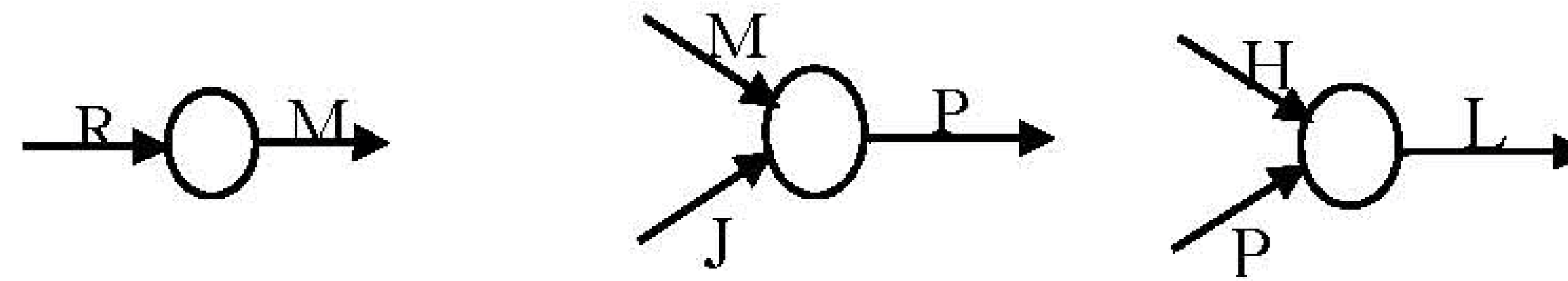


وتكون الشبكة الجزئية هي:

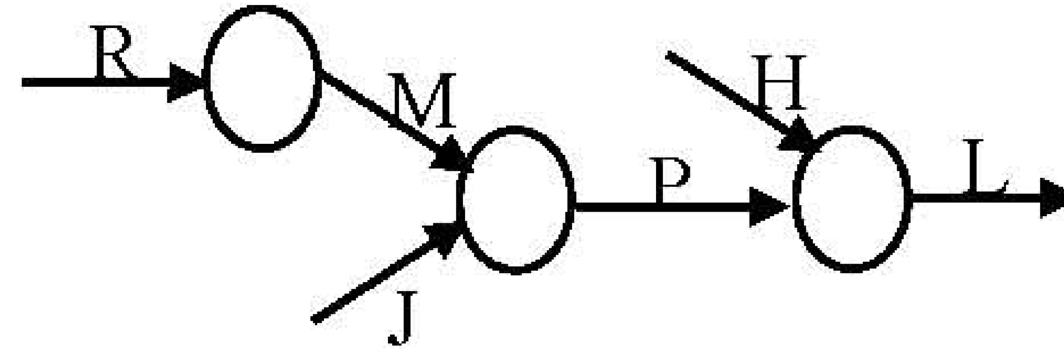
وإما كتابتها كالتالي:

ب– (R) يسبق (M) فلا يستطيع والحالة هذه أن ينتهيا مع بعض (قبل P).

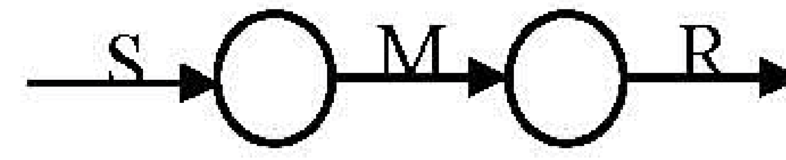
(**J**) يسبق (P) ولا يستطيع والحالة هذه أن ينتهي مع (P) مع بعض.



وبتجميع هذه المخططات الجزئية نحصل على ما يلي:



ت– (S) يسبق (**M**) في التنفيذ فلا يستطيع إذن أن ينتهي معه، والصحيح هو:

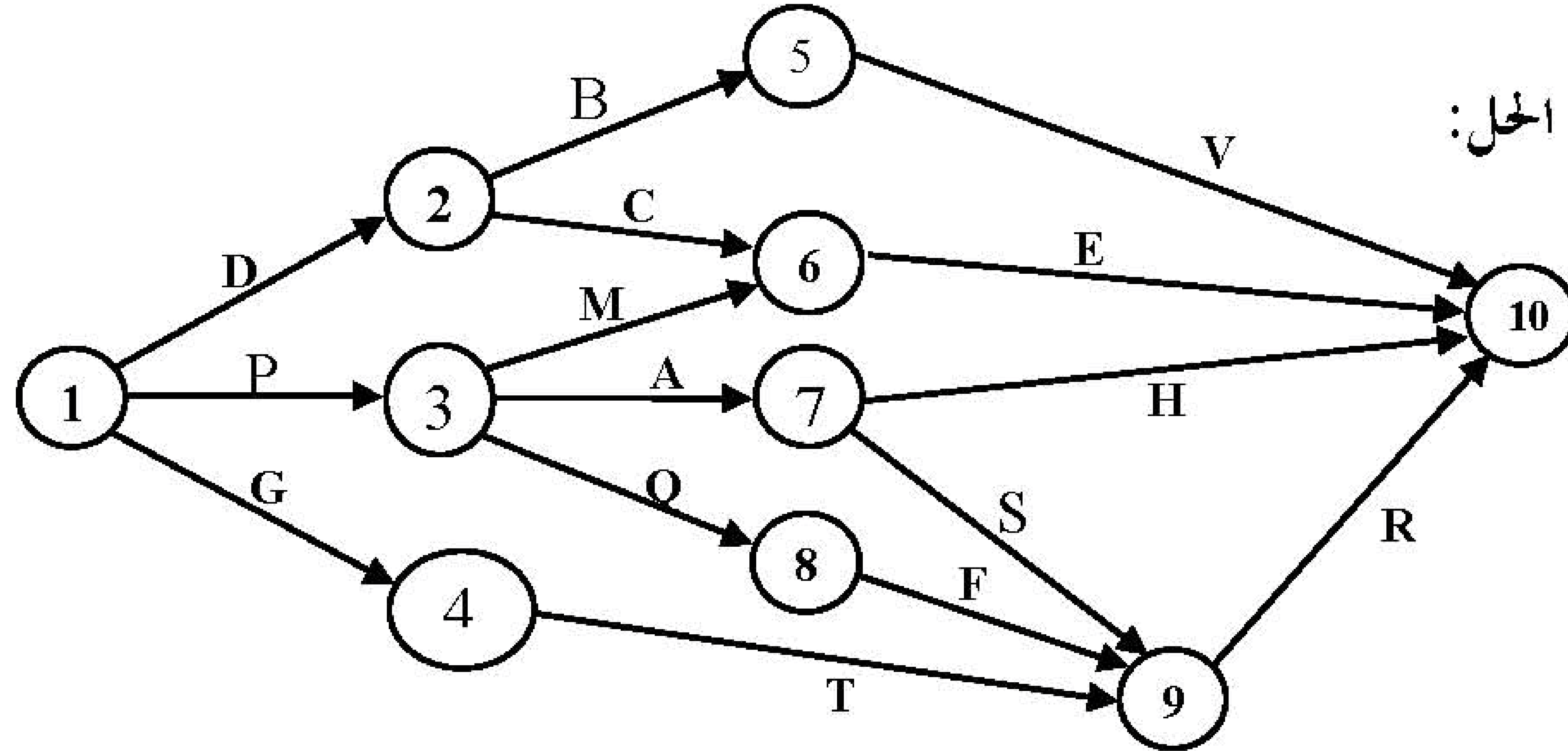


تمرين 4:

بالاستعانة بالجدول التالي الممثل لنشاطات مشروع معين وعلاقات التتابع بينها،كون شبكة تنفيذ هذا المشروع.

G	M	R	D	T	S	E	A	النشاط
--	P	F,S,T	--	G	A	C,M	P	النشاط السابق له مباشرة
	Q	P	V	F	H	B	C	النشاط
	P	--	B	Q	A	D	D	النشاط السابق له مباشرة

الحل:

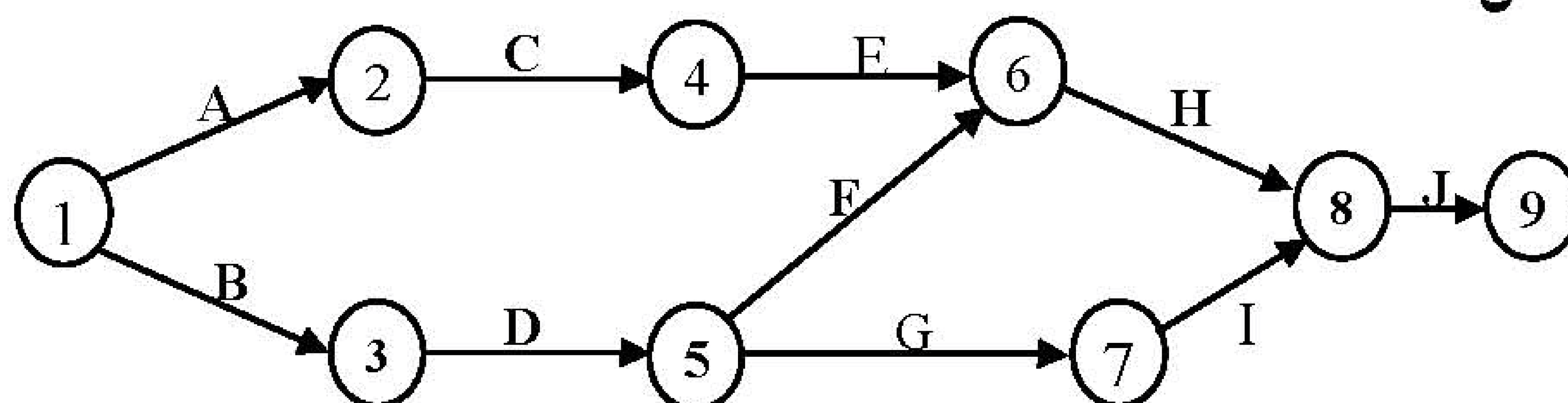


تمرين 5:

الجدول التالي يبين علاقات التتابع لنشاطات إنجاز مشروع معطى. كون شبكة إنجاز هذا المشروع.

النشاط	A	B	C	D	E	F
النشاط السابق له مباشرة	--	--	A	B	C	D
النشاط	G	H	I	J		
النشاط السابق له مباشرة	D	F,E	G	H,I		

الحل:

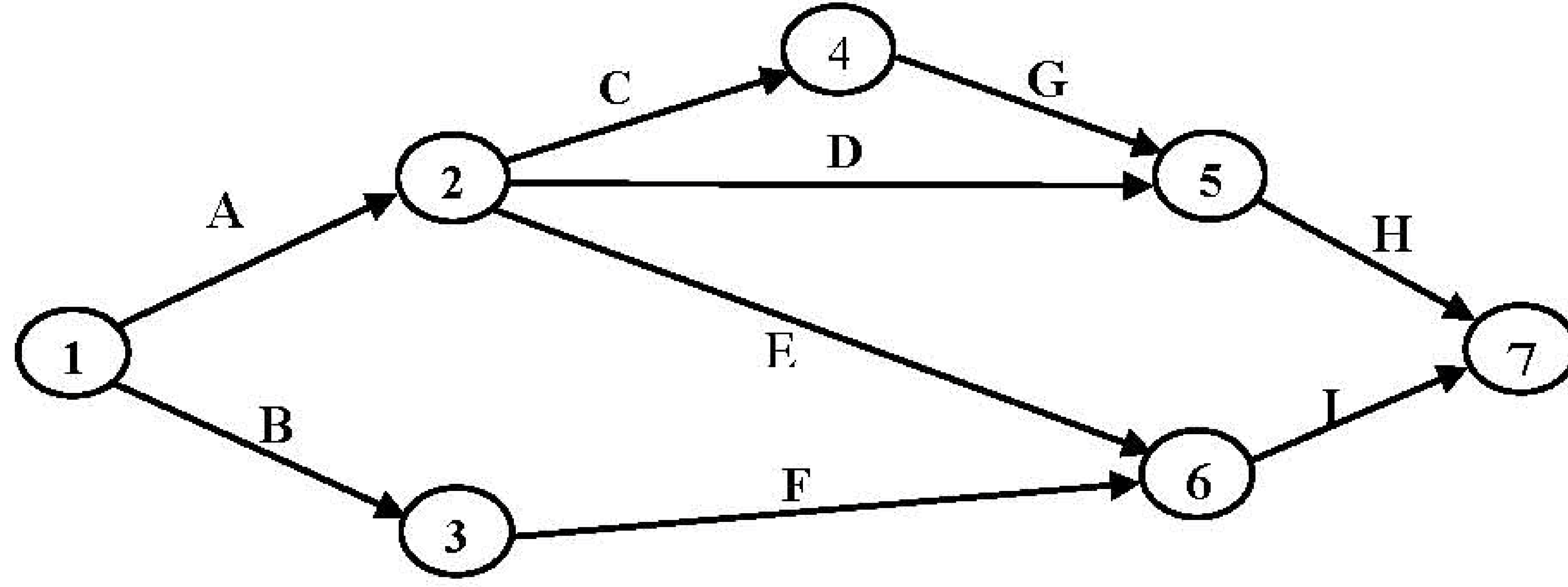


تمرين 6:

نفس السؤال:

النشاط	A	B	C	D	E	F
النشاط السابق له مباشرة	--	--	A	A	A	B
النشاط	G	H	I			
النشاط السابق له مباشرة	C	D,G	F,E			

الحل:



تمرين 7:

مصنع ما يتكون من عدة ورش، تعمل كلها من أجل تركيب منتج معين في اليوم، وكل ورشة تقوم بنشاط معين مرتبط بنشاط الورش الأخرى. العلاقات التتابعية بين نشاطات هذه الورش هي كالتالي:

الورشة (A) و(B) يبدآن العمل مع بعض.

الورشة (C) و(D) يبدآن العمل بعدما تنتهي (A) من عملها.

الورشة (E) و(F) يبدآن العمل بعدما تنتهي (B) من عملها.

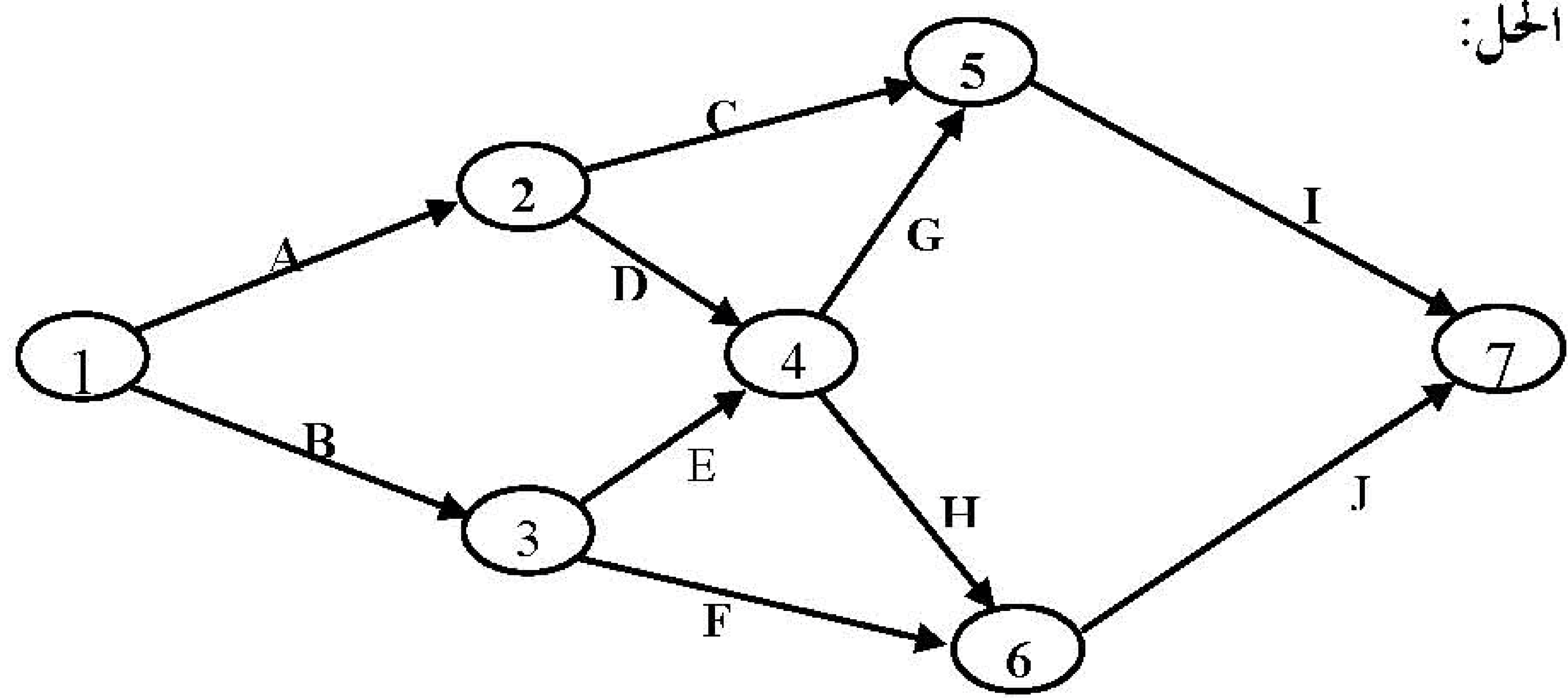
الورشة (G) و(H) يبدآن العمل بعد أن تنتهي (D) و (E) من عملها.

الورشة (I) تبدأ العمل بعدما تنتهي (C) و (G) من عملها.

الورشة (J) تبدأ العمل بعدما تنتهي (H) و (F) من عملها.

المطلوب: كون شبكة نشاط هذا المصنع.

الحل:

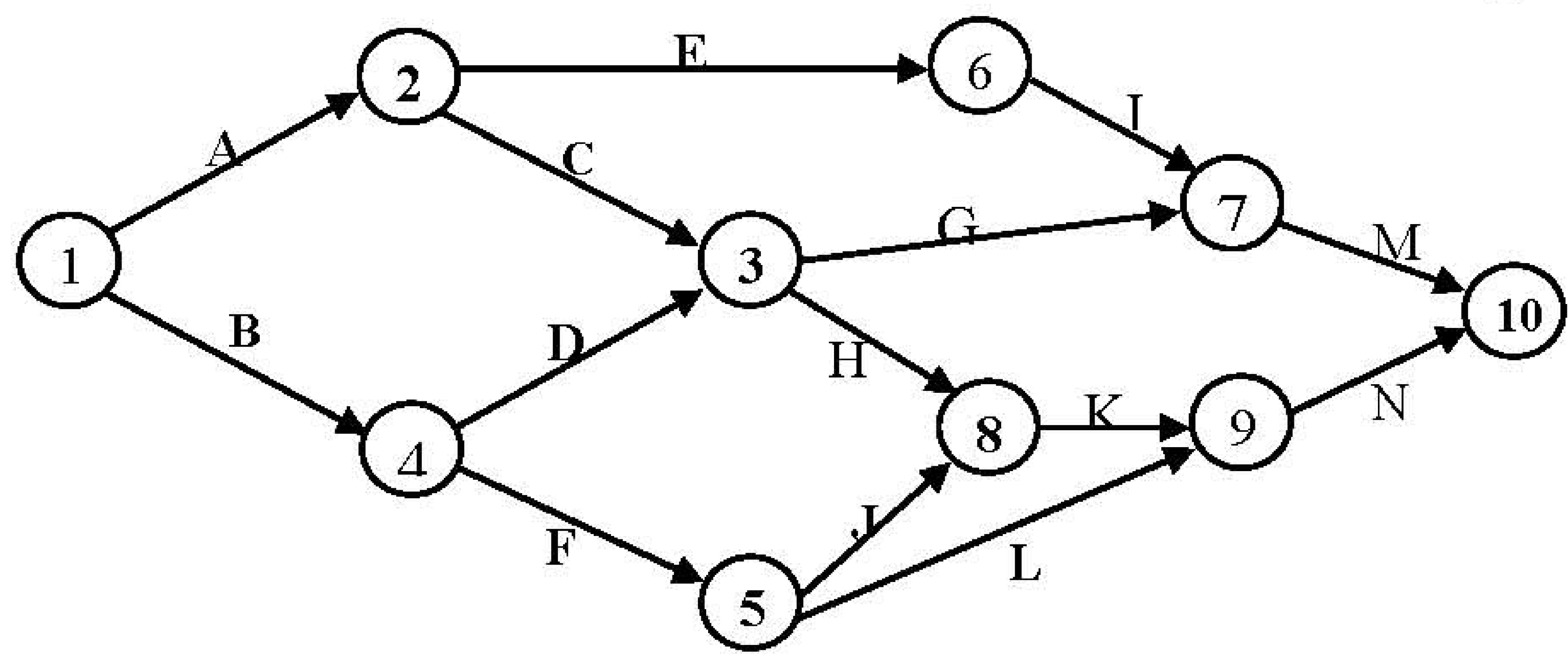


تمرين 8:

نفس السؤال السابق.

H	G	F	E	D	C	B	A	النشاط
D,C	D,C	B	A	B	A	--	--	النشاط السابق له مباشرة
		N	M	L	K	J	I	النشاط
		L,K	G,I	F	J,H	F	E	النشاط السابق له مباشرة

الحل:



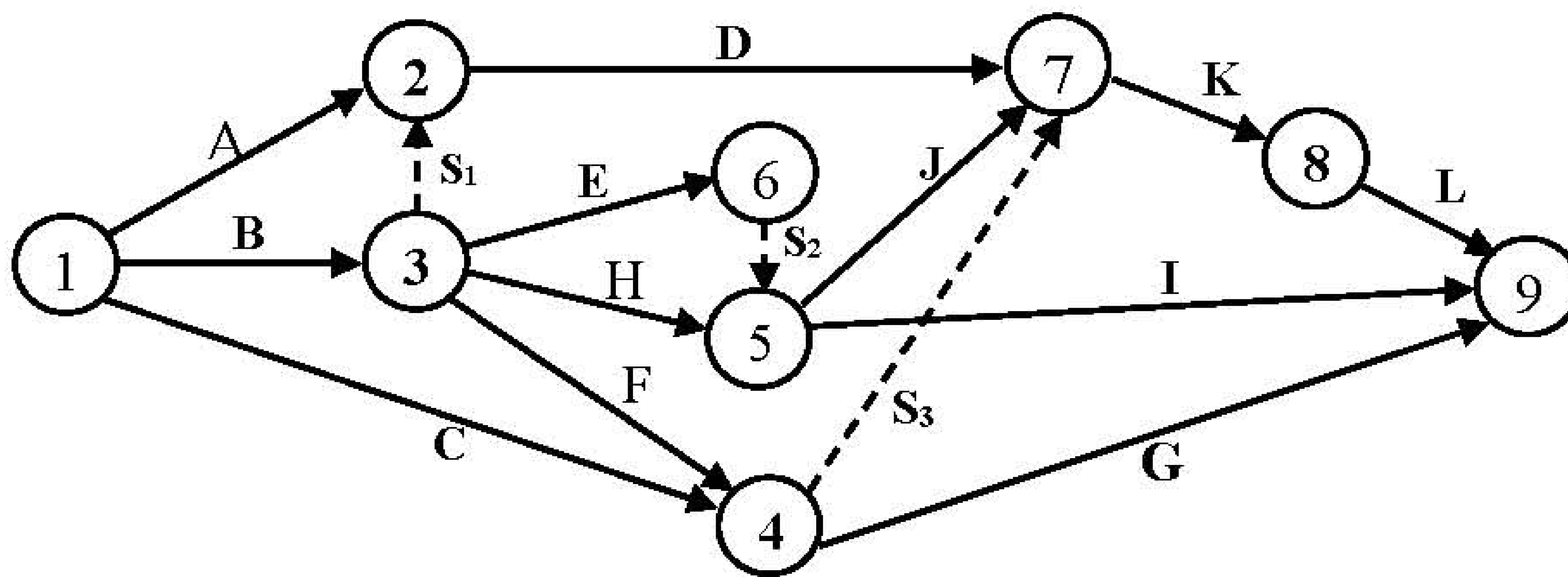
تمرين 9:

في ما يلي النشاطات الرئيسية التي يتكون منها مشروع بناء بيت وعددها **12** نشاط.

علاقات التتابع في التنفيذ بين هذه النشاطات هي كالتالي:

- النشاطات (C,A,B) تبدأ مع بعض، وهي تكون النشاطات التي يبدأ بها تنفيذ المشروع.
- النشاط (D) يعتمد في بداية تنفيذه على الانتهاء من تنفيذ النشاطين (A,B).
- النشاطات (H,F,E) تنطلق في تنفيذها عندما ينتهي تنفيذ النشاط (B).
- النشاط (G) يعتمد في بداية تنفيذه على الانتهاء من تنفيذ النشاطين (C,F).
- النشاطين (J,I) يبدأ تنفيذهما عندما يتم الانتهاء من تنفيذ النشاطين (H,E).
- النشاط (K) ينطلق في التنفيذ عندما تنتهي النشاطات (C,F,J,D).
- النشاط (L) ينطلق في تنفيذه بعد الانتهاء من تنفيذ (K).
- النشاطات (I,G,L) هي النشاطات التي ينتهي بها بناء البيت.

الحل:



تمرين 10:

ليكن المشروع التالي المتمثل في إعداد و بناء محطة للتسخين المركزي.

– المشروع يبدأ من إنجاز الدراسات التقنية وتحضير الملف الإداري للمشروع (النشاط A).

– ثم بعد ذلك يطرح المشروع للمنافسة واختيار المؤسسة المنجزة ثم إجراء الصفقة معها (النشاط B).

– يلي هذا بناء الأساس للبناية (النشاط C) وفي نفس الوقت تنطلق عملية بناء محطة التزود بالمياه وتمديد قنواتها إلى المحطة (النشاط D)، وكذلك إنجاز محطات وتمديد كابلات الكهرباء والتلفون، وقنوات الغاز (النشاط I).

– بعدما ينتهي النشاط (C) يبدأ النشاط (E) والنشاط (F): الأول يتمثل في إنجاز الأشغال الكبرى والثانوية، والثاني يتمثل في وضع وتثبيت قنوات الغاز، الماء والكهرباء داخل البناية.

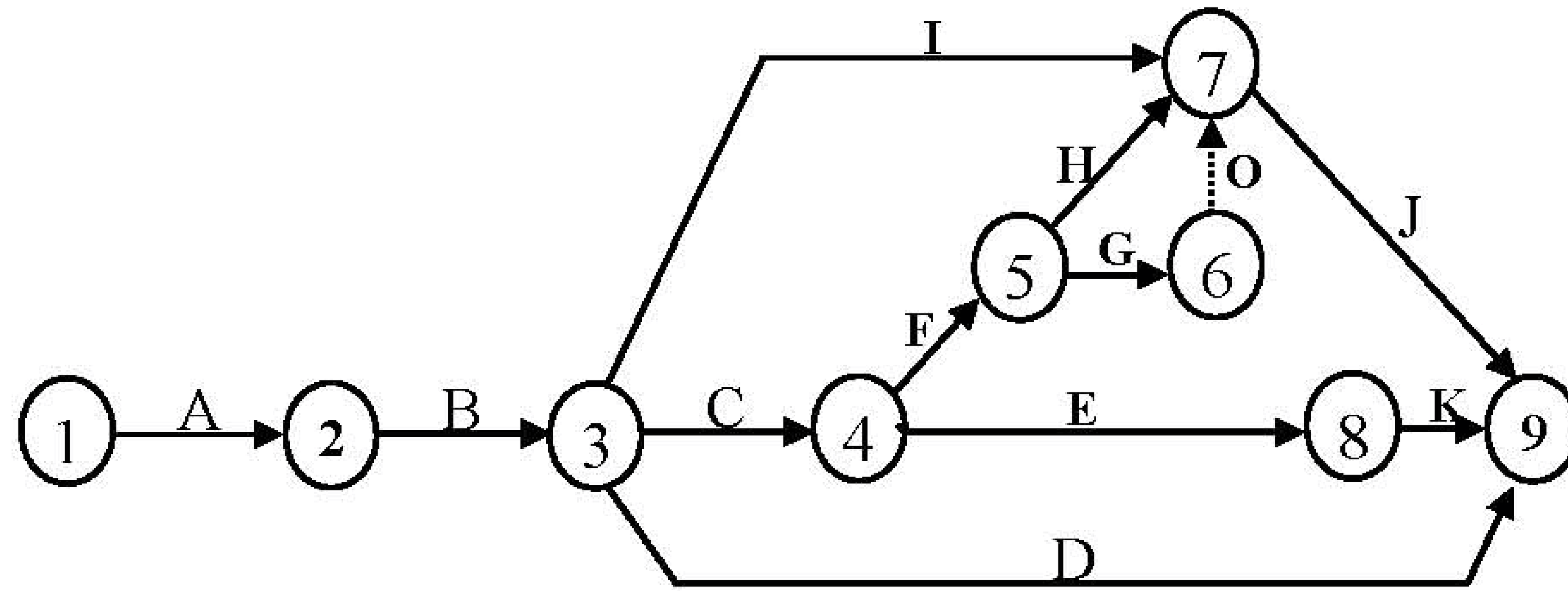
– بعد الانتهاء من النشاط (F) يبدأ النشاطان (H,G) والمتمثلان على التوالي في وضع محول للكهرباء ووضع تجهيزات التسخين وقنوات صرف فضلات الاحتراق.

– بعد الانتهاء من النشاطات (G,H,I) يبدأ النشاط (J) المتمثل في وضع أجهزة الضخ والدفع.

– ينتهي المشروع بانتهاء النشاطات (D,E,J).

كون الشبكة الخاصة بإنجاز هذا المشروع.

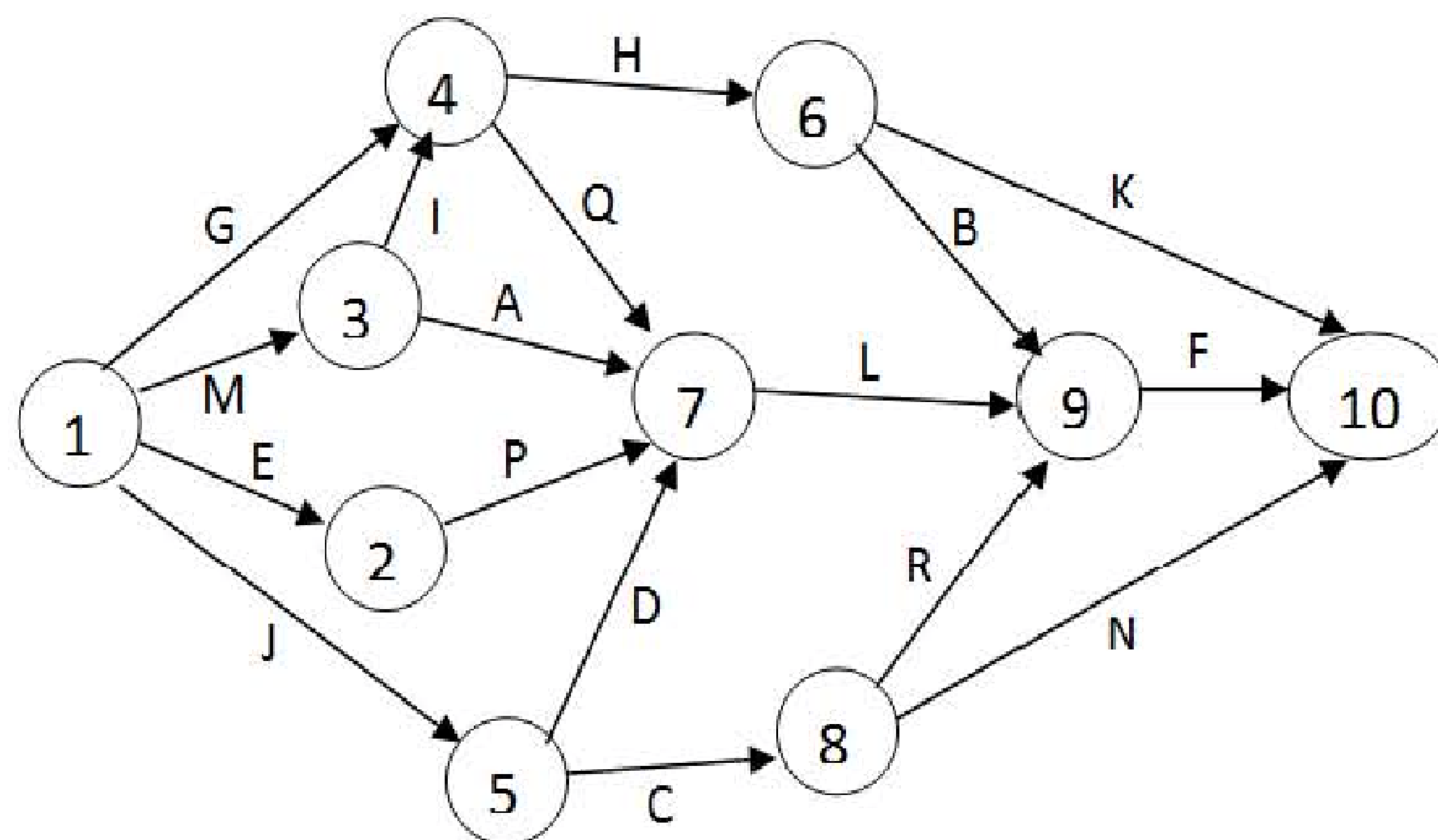
الحل:



تمرين 11– الجدول التالي يبين النشاطات التتابعية لانجاز مشروع معين، كون شبكة PERT لتنفيذ هذا المشروع.

النشاط	النشاط السابق له مباشرة	النشاط	النشاط السابق له مباشرة
A	M	J	---
B	H	K	H
C	J	L	A,D,Q,P
D	J	M	---
E	---	N	C
F	B,L,R	P	E
G	---	Q	G
H	G	R	C
I	M		

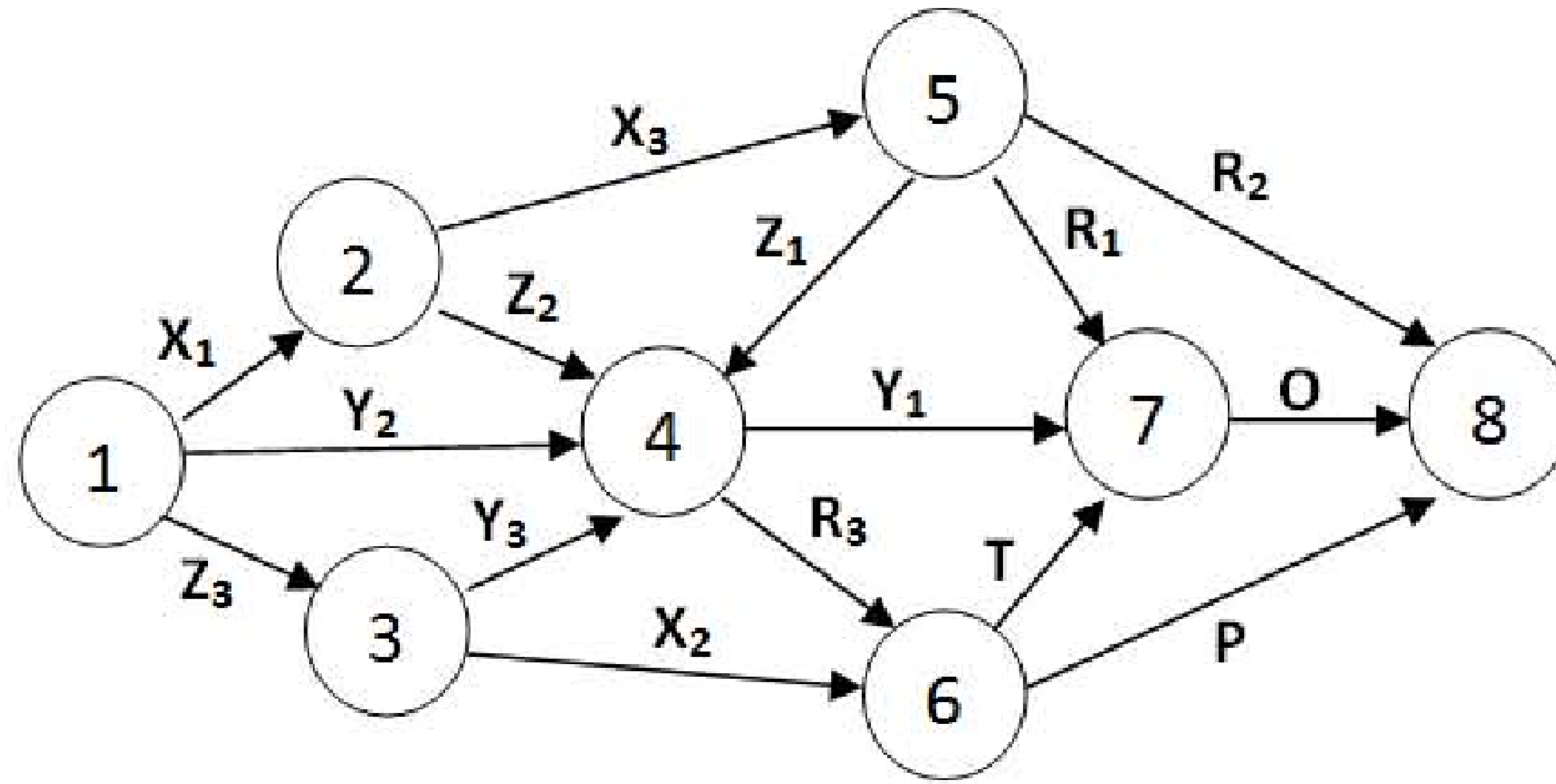
الحل:



تمرين 12- نفس السؤال باستخدام المعطيات التالية:

النشاط	النشاط السابق له مباشرة	النشاط	النشاط السابق له مباشرة
O	R_1, Y_1, T	X_3	X_1
P	R_3, X_2	Y_1	Y_2, Y_3, Z_1, Z_2
R_1	X_3	Y_2	-----
R_2	X_3	Y_3	Z_3
R_3	Y_2, Y_3, Z_1, Z_3	Z_1	X_3
T	X_2, R_3	Z_2	X_1
X_1	---	Z_3	---
X_2	Z_3		

الحل:



تمرين 13 - لدينا مشروع يتمثل في إنجاز مجمع لاستخراج والتزود بالماء الصالح للشرب.

نشاطات تنفيذ هذا المشروع يمكن تجميعها في خمسة أجزاء رئيسية كالتالي:

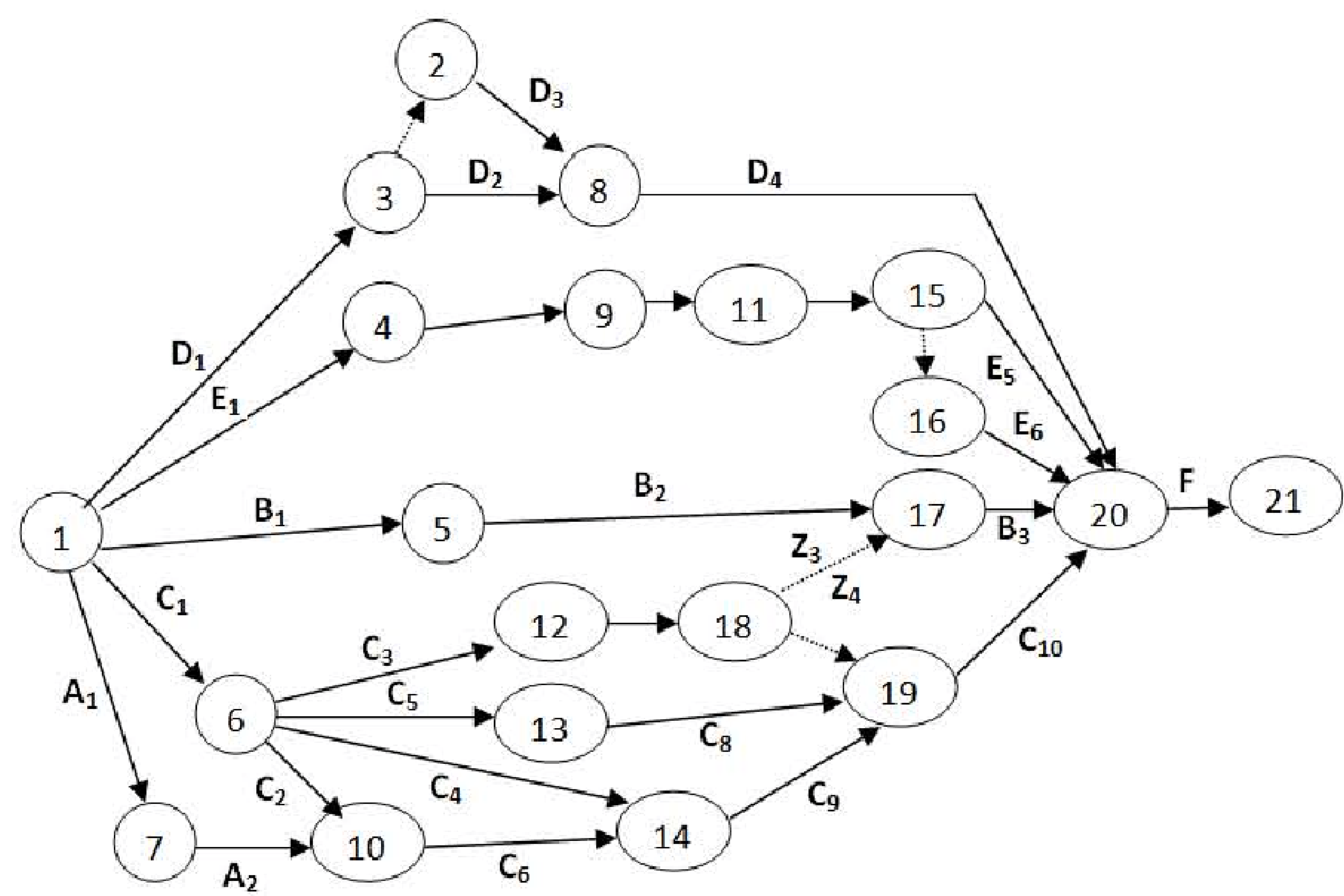
التزود بالكهرباء – حفر وتجهيز البئر– بناء وتجهيز محطة الضخ – توصيل قنوات ضخ الماء – بناء وتجهيز خزان الماء.

العلاقات التتابعية بين مراحل تنفيذ النشاطات المكونة لهذا المشروع هي كالتالي:

الجزء الرئيسي	النشا ط	النشاط السابق له مباشرة
التزود بالكهرباء – A –	A_1 : تثبيت أعمدة الكهرباء	-----
	A_2 : توصيل الخط الكهربائي بين الأعمدة	A_1
حفر وتجهيز البئر – B –	B_1 : حفر البئر	------
	B_2 : الترصيف الداخلي للبئر	B_1
	B_3 : وضع قنوات سحب الماء من البئر	C_7 , B_2
بناء وتجهيز محطة الضخ – C –	C_1 : بناء الأساس والأرضية	-----
	C_2 : إنجاز البناية وترصيفها	C_1
	C_3 : بناء أرضية لتثبيت المضخات	C_1
	C_4: بناء أرضية لتثبيت المحول الكهربائي	C_1
	C_5: بناء أرضية لتثبيت أجهزة تطهير وتنقية الماء	C_1
	C_6: إدخال الكهرباء إلى داخل بناية المضخة	C_2 , A_2
	C_7: تركيب المضخات	C_3
	C_8:تركيب أجهزة تنقية الماء	C_5
	C_9: تركيب المحول الكهربائي	C_6 , C_4
	C_{10}: ربط أجهزة الضخ بالكهرباء	C_8 , C_9 , C_7
توصيل قنوات ضخ الماء – D	D_1: حفر الخندق	------
	D_2: وضع قنوات ضخ الماء	D_1
	D_3: وضع وتوصيل الخط الكهربائي الذي يزود جهاز تنظيم مستوى الماء	D_1
	D_4: ردم الخندق	D_3 , D_2
بناء وتجهيز خزان الماء– E –	E_1: بناء الأساس	-----
	E_2: بناء حامل خزان الماء	E_1
	E_3: بناء الخزان	E_2
	E_4: الترصيف الداخلي للخزان	E_3
	E_5: وضع جهاز تنظيم مستوى الماء	E_4
	E_6: وضع قنوات جلب وتصريف الماء من الخزان	E_4

$, E_6\ ,\ E_5\ ,\ D_4$ $C_{10}\ ,\ B_3$	F	إجراء عملية تجريب المجمع بعد ربطه بشبكة التزود بالماء – F –

الحل:



الفرع الثاني : عداد الجدول الزمني

لقد انتهينا من المرحلة الأولى من عرض طريقة (PERT) والمتمثلة في وضع الشبكة التي تحدد مراحل وأولويات تنفيذ النشاطات.

هذه الشبكة كما رأينا تعطينا معلومات عن صيغة التتابع في التنفيذ، بمعنى التعرف على الأنشطة التي يجب إتمامها قبل البدء في تنفيذ نشاطات أخرى، وكذلك معرفة الأزمنة المتوقعة لتنفيذ كل نشاط.

الآن نبدأ المرحلة الثانية وهي مرحلة حساب أزمنة تنفيذ المسارات المختلفة للشبكة ومن بينها تحديد المسار الحرج.

ما هو المسار الحرج ؟ يتكون المسار الحرج من النشاطات التي يكون مجموع مدد إنجازها أكبر من غيرها من المسارات الأخرى، وبالتالي فهو يحدد الوقت الكلي الأقصى الضروري لإنجاز المشروع ككل، فهذه النشاطات إذن يلزم أن لا تتعطل في إنجازها. بينما النشاطات الأخرى المنتمية إلى المسارات غير الحرجة مدة إنجازها أقصر وبالتالي فتأخيرها لا يؤثر على المدة القصوى لإنجاز المشروع ككل.

هناك طريقتين لحساب أزمنة هذه المسارات:

1- طريقة الحساب إلى الأمام (الحساب من بداية الشبكة إلى نهايتها)

2- طريقة الحساب إلى الخلف (الحساب من نهايتها إلى بدايتها)

الطريقة الأولى تعطينا الأزمنة المبكرة (المنتظرة، المخططة) لبداية ونهاية النشاطات، والطريقة الثانية تعطينا الأزمنة المتأخرة (المسموح التأخر بها) لبداية ونهاية النشاطات.

أولا: الحساب إلى الأمام Forword pass:

يعني الحساب إلى الأمام بداية حساب مدد تنفيذ النشاطات من الحادث الأول (الابتدائي) للشبكة في اتجاه النهاية، والهدف من ذلك هو حساب **الأوقات المبكرة لبداية ونهاية** النشاطات المكونة للمشروع.

هذا الحساب يبدأ من أكبر وقت مبكر لبداية الحادث الابتدائي في المشروع والذي نضعه يساوي صفر، أي $ES_1 = 0$ **Temps**، على أساس أن نقطة الانطلاق الزمني للانجاز هي صفر.

من أجل أن نتمكن من إجراء الحساب إلى الأمام يجب معرفة المصطلحات التالية:

- الوقت المبكر للحادث (البداية المبكرة لحادث ما Earliest Start) ونرمز لها بالرمز (ES_j).

- الوقت المبكر لبداية نشاط ما (البداية المبكرة لنشاط ما **j,z**) ونرمز لها بالرمز ($ES_{(j,z)}$).

- الوقت المبكر لنهاية نشاط ما (النهاية المبكرة لنشاط ما EarliestCompletion) ونرمز لها بالرمز $EC_{(j,z)}$.

يجب أيضا معرفة القواعد التالية:

1) مهما كانت بداية الحادث مبكرة فإنها لا تحدث إلا بعد أن تنتهي كل النشاطات السابقة له مباشرة وخاصة ذو مدة الانجاز الأطول، بمعنى النشاط ذو النهاية المبكرة الأطول (EC_{jz} الأطول).

وبالتالي فالبداية المبكرة لأي حادث وهي ES_z = أعظم (أكبر) نهاية مبكرة (EC_{jz}) للنشاطات التي تسبق أو تصب في هذا الحادث ، هذا يعني :

$$ES_z = \left(\max_{j = 1,\dots\dots,n}\right) \{EC_{j,z}\}$$

2) النهاية المبكرة لأي نشاط ($EC_{j,z}$) تساوي البداية المبكرة لهذا النشاط (ES_{jz}) زائد الطول الزمني لهذا النشاط (مدة تنفيذه) وهو D_{jz} ، أي:

$$EC_{j,z} = ES_{j,z} + D_{j,z}.$$

3) إذا كان لدينا نشاط ما (j,z)، فإن البداية المبكرة له ($ES_{j,z}$) هي عبارة عن البداية المبكرة (ES_j) للحادث الذي ينطلق منه هذا النشاط. أي: $ES_{j,z} = ES_j$

4) إذا كانت هناك عدة نشاطات تنطلق من الحادث (j) فإن الوقت المبكر لبداية هذه النشاطات كلها يساوي الوقت المبكر لبداية الحادث (j) الذي تنطلق منه:

$$ES_j = ES_{j,z1} = ES_{j,z2} = ES_{j,z3} = \ldots..$$

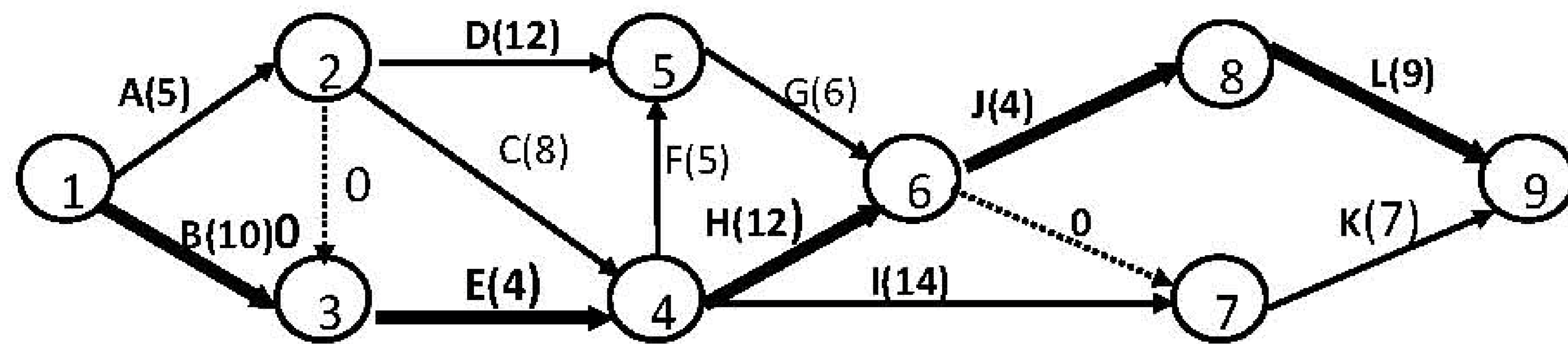
5) انطلاقا من **1,2,3,4** فإنه بإمكاننا حساب النهاية المبكرة لكل نشاط كالتالي:

$$EC_{j,z} = ES_j + D_{j,z}$$

وبالتالي الصيغة (1) يمكن كتابتها كالتالي:

$$ES_z = \left(\begin{matrix} max \\ j=1,....,n \end{matrix}\right) \{ES_j + Dj,z\}.$$

مثال 1: احسب البدايات المبكرة للحوادث التي تتشكل منها الشبكة التالية، ثم احسب البدايات والنهايات المبكرة للنشاطات.



الحل:

1- حساب البدايات المبكرة للحوادث:

لدينا:

$$ES_1 = 0$$

$$ES_2 = \left(\begin{matrix} \max \\ j=1 \end{matrix}\right) \{EC_{j,2}\} = \max \{ES_{12} + D_{12}\}$$
$$= \max \{ES_1 + D_{12}\} = \{0 + 5\} = 5$$

$$ES_3 = \left(\begin{matrix} \max \\ j=1,2 \end{matrix}\right) \{EC_{j,3}\} = \max \{ES_{13} + D_{13}, ES_{23} + D_{23}\}$$
$$= \max \{ES_1 + D_{13}, ES_2 + D_{23}\} = \{0 + 10, 5 + 0\} = 10$$

$$ES_4 = \left(\begin{matrix} \max \\ j=2,3 \end{matrix}\right) \{EC_{j,4}\} = \max \{ES_{24} + D_{24}, ES_{34} + D_{34}\}$$
$$= \max \{ES_2 + D2_4, ES_3 + D_{34}\} = \max \{5 + 8, 10 + 4\} = 14$$

$$ES_5 = \left(\begin{matrix} \max \\ j=2,4 \end{matrix}\right) \{EC_{j,5}\} = \max \{ES_{25} + D_{25}, ES_{45} + D_{45}\}$$
$$= \max \{ES_2 + D_{25}, ES_4 + D_{45}\} = \max \{5 + 12, 14 + 5\} = 19$$

$$ES_6 = \left(\begin{matrix} \max \\ j=4,5 \end{matrix}\right) \{EC_{j,6}\} = \max \{ES_{46} + D_{46}, ES_{56} + D_{56}\}$$
$$= \max\{ES_4 + D_{46}, ES_5 + D_{56}\} = \max \{14 + 12, 19 + 6\} = 26$$

$$ES_7 = \left(\begin{matrix} \max \\ j=4,6 \end{matrix}\right) \{EC_{j,7}\} = \max \{ES_{47} + D_{47}, ES_{67} + D_{67}\}$$

$$= \max \{ES_4 + D_{47}, ES_6 + D_{67}\} = \max \{14 + 14, 26 + 0\} = 28$$

$$ES_8 = \left(\begin{matrix} \max \\ j=6 \end{matrix}\right) \{EC_{j,8}\} = \max \{ES_{68} + D_{68}\} = \max \{ES_6 + D_{68}\}$$
$$= \max \{26 + 4\} = 30$$

$$ES_9 = \left(\begin{matrix} \max \\ j=7,8 \end{matrix}\right) \{EC_{j,9}\} = \max \{ES_{79} + D_{79}, ES_{89} + D_{89}\}$$
$$= \max \{ES_7 + D_{79}, ES_8 + D_{89}\} = \max \{28 + 7, 30 + 9\} = 39$$

2) حساب البدايات المبكرة للنشاطات والنهايات المبكرة لها:

$ES_{12} = ES_1 = 0$	$ES_{45} = ES_4 = 14$
$ES_{13} = ES_1 = 0$	$ES_{46} = ES_4 = 14$
$ES_{23} = ES_2 = 5$	$ES_{47} = ES_4 = 14$

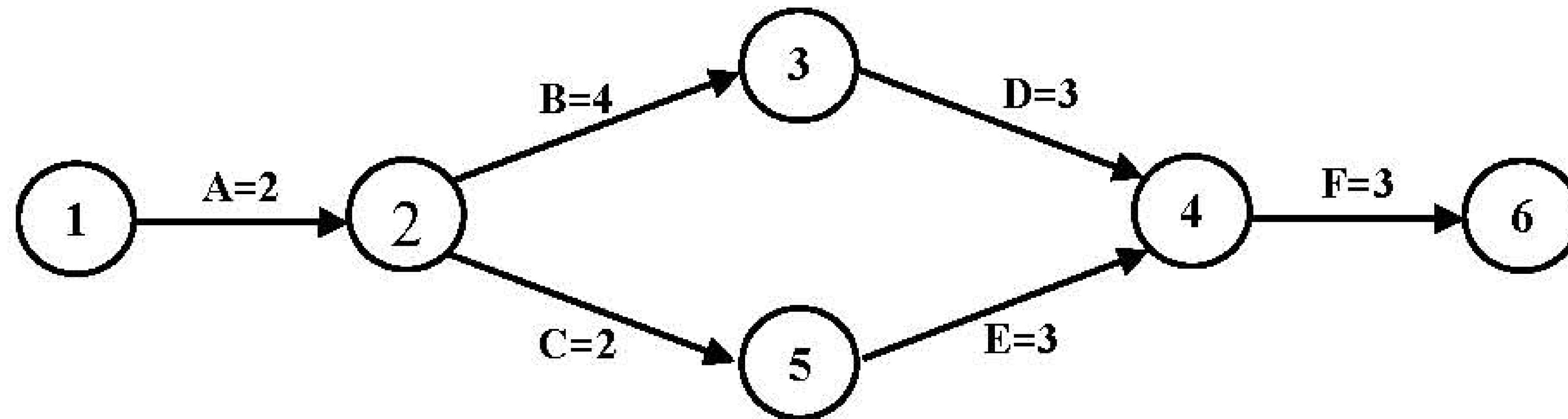
$ES_{24} = ES_2 = 5$
$ES_{25} = ES_2 = 5$
$ES_{34} = ES_3 = 10$

$ES_{56} = ES_5 = 19$
$ES_{67} = ES_6 = 26$
$ES_{68} = ES_6 = 26$
$ES_{79} = ES_7 = 28$
$ES_{89} = ES_8 = 30$

$EC_{12} = ES_{12} + D_{12} = ES_1 + D_{12} = 0 + 5 = 5$
$EC_{13} = ES_{13} + D_{13} = ES_1 + D_{13} = 0 + 10 = 10$
$EC_{23} = ES_{23} + D_{23} = ES_2 + D_{23} = 5 + 0 = 5$
$EC_{24} = ES_{24} + D_{24} = ES_2 + D_{24} = 5 + 8 = 13$
$EC_{25} = ES_{25} + D_{25} = ES_2 + D_{25} = 5 + 12 = 17$
$EC_{34} = ES_{34} + D_{34} = ES_3 + D_{34} = 10 + 4 = 14$
$EC_{45} = ES_{45} + D_{45} = ES_4 + D_{45} = 14 + 5 = 19$
$EC_{46} = ES_{46} + D_{46} = ES_4 + D_{46} = 14 + 12 = 26$
$EC_{47} = ES= + D_{47} = ES_4 + D47 = 14 + 14 = 28$
$EC_{56} = ES_{56} + D_{56} = ES_5 + D_{56} = 19 + 6 = 25$

$EC_{67} = ES_{67} + D_{67} = ES_6 + D_{67} = 26 + 0 = 26$
$EC_{68} = ES_{68} + D_{68} = ES_6 + D_{68} = 26 + 4 = 30$
$EC_{79} = ES_{79} + D_{79} = ES_7 + D_{79} = 28 + 7 = 35$
$EC_{89} = ES_{89} + D_{89} = ES_8 + D_{89} = 30 + 9 = 39$

مثال 2 : أجب على نفس السؤال السابق للشبكة التالية.



1- حساب البدايات المبكرة للحوادث:

$ES_1 = 0$

$ES_2 = \begin{pmatrix} \max \\ j=1 \end{pmatrix} \{ EC_{12} \} = \max \{ ES_{12} + D_{12} \}$

$= \max \{ ES_1 + D_{12} \} = 0 + 2 = 2$

$ES_3 = \begin{pmatrix} \max \\ j=2 \end{pmatrix} \{ EC_{23} \} = \max \{ ES_{23} + D_{23} \} = 2 + 4 = 6$

$ES_5 = \begin{pmatrix} \max \\ j=2 \end{pmatrix} \{ EC_{25} \} = \max \{ ES_{25} + D_{25} \} = 2 + 2 = 4$

$ES_4 = \begin{pmatrix} \max \\ j=3,5 \end{pmatrix} \{ EC_{34}, EC_{54} \} = \max \{ ES_{34} + D_{34}, ES_{54} + D_{54} \}$

$= \{6 + 3, 4 + 3\} = 9$

$ES6 = \begin{pmatrix} \max \\ j=4 \end{pmatrix} \{EC46\} = \max \{ES46 + D46\} = 9 + 3 = 12$

2- حساب البدايات المبكرة للنشاطات:

$ES_{12} = ES_1 = 0$ $\quad$ $ES_{34} = ES_3 = 6$

$ES_{23} = ES_2 = 2$ $\quad$ $ES_{54} = ES_5 = 4$

$ES_{25} = ES_2 = 2$ $\quad$ $ES_{46} = ES_4 = 9$

3- حساب النهايات المبكرة للنشاطات:

$EC_{12} = ES_{12} + D_{12} = ES_1 + D_{12} = 0 + 2 = 2$

$EC_{23} = ES_{23} + D_{23} = 2 + 4 = 6$

$EC_{25} = ES_{25} + D_{25} = 2 + 2 = 4$

$EC_{34} = ES_{34} + D_{34} = 6 + 3 = 9$

$EC_{54} = ES_{54} + D_{54} = 4 + 3 = 7$

$EC_{46} = ES_{46} + D_{46} = 9 + 3 = 12$

ثانيا:الحساب إلى الخلف: الحساب إلى الخلف يعني حساب أزمنة تنفيذ النشاطات المكونة للمشروع ابتداء من نهاية الشبكة، أي ابتداء من الحادث الذي يشكل نهاية

المشروع، والهدف من ذلك هو حساب الأزمنة المسموح التأخر بها لبداية ونهاية كل نشاط.

حساب هذه الأزمنة يشترط بداية الحادث الأخير في وقته المبكر والمحسوب في الحساب إلى الأمام، أو بعبارة أخرى: الحادث الأخير يجب أن يكون الوقت المبكر لبدايته = الوقت المتأخر لبدايته: $\mathbf{ES_z = LS_z}$

إذن الحساب إلى الخلف يبدأ من الحادث الأخير للشبكة، وعبارة الوقت المسموح التأخر به لبداية نشاط ما يمكن فهمها بالوقت الذي يمكن أن يتعطل به بداية تنفيذ هذا النشاط بدون أن يتسبب في زيادة (إطالة) الوقت الكلي لإنجاز المشروع ككل.

من أجل أن نتمكن من إجراء الحساب إلى الخلف يجب معرفة المصطلحات التالية:

1– البداية المسموح التأخر بها لحادث ما **j** (Lastest Start) نرمز لها بالرمز $\mathbf{LS_j}$:

2– البداية المسموح التأخر بها لنشاط ما **j,z** ونرمز لها $\mathbf{LS_{(j,z)}}$:

3– النهاية المتأخرة لنشاط ما Lastest Completion نرمز لها $\mathbf{LC_{(j,z)}}$: لكي نستطيع أن نجري الحساب إلى الخلف، يجب معرفة كيفية حساب البدايات المتأخرة للحوادث التي تنطلق منها النشاطات وكذلك البدايات والنهايات المتأخرة للنشاطات المشكلة للمشروع، وبذلك نتمكن من معرفة الزمن الأكثر تأخيرا لبداية المشروع والأكثر تأخيرا لانتهائه. هذا يتطلب معرفة القواعد التالية:

1–البداية المتأخرة لأي حادث (**j**) مثلا وهي ($\mathbf{LS_j}$) تساوي أقل أو أقصر بداية متأخرة للنشاطات التي تنطلق (تتفرع) من هذا الحادث.

أي: $\mathbf{LS_j} = \left(\min_{z=1,\ldots,n}\right)\{\ \mathbf{LS_{j,z}}\ \}$

لماذا نقول أن البداية المتأخرة لأي حادث لا يمكن أن تكون أكبر من أقل بداية متأخرة للنشاطات التي تنطلق منه، لأن هذا الحادث يبدأ عندما يبدأ النشاط ذو

البداية المتأخرة الأصغر، حيث أن النشاط الذي تكون له أقل بداية متأخرة هو الذي عمليا يبدأ قبل غيره. وبالتالي فالحادث الذي ينطلق منه لا يمكن أن يتأخر أكثر من ذلك.

لكن كل بداية متأخرة لأي نشاط ($LS_{j,z}$) = النهاية المتأخرة له ($LC_{j,z}$) ناقص مدة (طول) هذا النشاط ($D_{j,z}$).

أي : $LS_{j,z} = LC_{j,z} - D_{j,z}$.

وبالتالي فإن: $LS_j = \left(\underset{z=1,\dots,n}{\min}\right) \{ LC_{j,z} - D_{j,z} \}$.

2- النهاية المتأخرة لأي نشاط ($LC_{j,z}$) = البداية المتأخرة للحادث الذي يأتي بعده، أي الذي ينطلق منه (LS_z)، بمعنى البداية المتأخرة لأي حادث (LS_z) = النهاية المتأخرة للنشاط السابق له ($LC_{j,z}$)، أي للنشاط الذي يصب فيه.

3- إذا كانت هناك عدة نشاطات تصب في الحادث (**z**) فإن الوقت المتأخر لنهاية هذه النشاطات يساوي الوقت المتأخر لبداية الحادث الذي تصب فيه هذه النشاطات.

$$LS_z = LC_{j1,z} = LC_{j2,z} = \dots\dots$$

4- انطلاقا من **1**, **2**, **3** فإنه بإمكاننا أن نكتب البداية المتأخرة لأي نشاط كالتالي:

$$LS_{j,z} = LS_z - D_{j,z}$$

وتصبح البداية المتأخرة لأي حادث كالتالي:

$$LS_j = \left(\underset{z=1,\dots,n}{\min}\right) \{ LS_z - D_{jz} \}$$

مثال 1: نأخذ نفس المثال الأول السابق، المستعمل في الحساب إلى الأمام، و نجري له الحساب إلى الخلف.

1- البدايات المتأخرة للحوادث:

$LS_9 = ES_9 = 39$

$LS_8 = \left(\substack{\min \\ z=9}\right)\{LS_{8,z}\} = \min\{LC_{89} - D_{89}\} = \min\{LS_9 - D_{89}\}$

$= \min\{39 - 9\} = 30$

$LS_7 = \left(\substack{\min \\ z=9}\right)\{LS_{7,z}\} = \min\{LC_{79} - D_{79}\} = \min\{LS_9 - D_{79}\}$

$= \min\{39 - 7\} = 32$

$LS_6 = \left(\substack{\min \\ z=7,8}\right)\{LS_{6,z}\} = \min\{LC_{69} - D_{69}\ ,\ LC_{68} - D_{68}\}$

$= \min\{LS_7 - D_{67}\ ,\ LS_8 - D_{68}\}$

$= \min\{32 - 0\ ,\ 30 - 4\} = 26$

$LS_5 = \left(\substack{\min \\ z=6}\right)\{LS_{5,z}\} = \min\{LC_{5,6} - D_{56}\} = \min\{LS_6 - D_{56}\}$

$= \min\{26 - 6\} = 20$

$LS_4 = \left(\substack{\min \\ z=6,7}\right)\{LS_{4,z}\} = \min\{LC_{46} - D_{46}\ ,\ LC_{47} - D_{47}\}$

$= \min\{LS_6 - D_{46}\ ,\ LS7 - D_{47}\}$

$= \min\{26 - 12\ ,\ 32 - 14\} = 14$

$LS_3 = \left(\substack{\min \\ z=4}\right)\{LS_{3,z}\} = \min\{LC_{34} - D_{34}\}$

$= \min\{LS_4 - D_{34}\} = \min\{14 - 4\} = 10$

$LS_2 = \left(\substack{\min \\ z=3,4,5}\right)\{LS_{2,z}\} = \min\{LC_{23} - D_{23}\ ,LC_{24} - D_{24}\ ,LC_{25} - D_{25}\}$

$= \min\{LS_3 - D_{23}\ ,\ ýLS_4 - D_{24}\ ,\ LS_3 - D_{25}\}$

$LS_2 = \min\{10 - 0\ ,\ 14 - 8\ ,\ 20 - 12\} = 6$

$LS_1 = \left(\substack{\min \\ z=2,3}\right)\{LS_{1,z}\} = \min\{LC_{12} - D_{12}\ ,\ LC_{13} - D_{13}\}$

$= \min\{LS_2 - D_{12}\ ,\ LS_3 - D_{13}\}$

$= \min\{6 - 4\ ,\ 10 - 10\} = 0$

2 - حساب البدايات المتأخرة للنشاطات:

$LS_{89} = LC_{89} - D_{89} = LS_9 - D_{89} = 39 - 9 = 30$

$LS_{79} = LC_{79} - D_{79} = LS_9 - D_{79} = 39 - 7 = 32$

$LS_{69} = LC_{69} - D_{69} = LS_7 - D_{67} = 32 - 0 = 32$

$LS_{68} = LC_{68} - D_{68} = LS_8 - D_{68} = 30 - 4 = 26$

$LS_{56} = LC_{56} - D_{56} = LS_6 - D_{56} = 26 - 6 = 20$

$LS_{46} = LC_{46} - D_{46} = LS_6 - D_{46} = 26 - 12 = 14$

$LS_{45} = LC_{45} - D_{45} = LS_5 - D_{45} = 20 - 5 = 15$

$LS_{47} = LC_{47} - D_{47} = LS_7 - D_{47} = 32 - 14 = 18$

$LS_{34} = LC_{34} - D_{34} = LS_4 - D_{34} = 14 - 4 = 10$

$LS_{25} = LC_{25} - D_{25} = LS_5 - D_{25} = 20 - 12 = 8$

$LS_{24} = LC_{24} - D_{24} = LS_4 - D_{24} = 14 - 8 = 6$

$LS_{23} = LC_{23} - D_{23} = LS_3 - D_{23} = 10 - 0 = 10$

$LS_{13} = LC_{13} - D_{13} = LS_3 - D_{13} = 10 - 10 = 0$

$LS_{12} = LC_{12} - D_{12} = LS_2 - D_{12} = 6 - 5 = 1$

3- حساب النهايات المتأخرة للنشاطات:

$LC_{89} = LS_9 = 39$	$LC_{46} = LS_6 = 26$	$LC_{24} = LS_4 = 14$
$LC_{79} = LS_9 = 39$	$LC_{45} = LS_5 = 20$	$LC_{23} = LS_3 = 10$
$LC_{69} = LS_8 = 30$	$LC_{47} = LS_7 = 32$	$LC_{12} = LS_2 = 6$
$LC_{67} = LS_7 = 32$	$LC_{34} = LS_4 = 14$	$LC_{13} = LS_3 = 10$
$LC_{56} = LS_6 = 26$	$LC_{25} = LS_5 = 20$	

مثال 2: أحسب البدايات المتأخرة للحوادث، وكذلك البدايات والنهايات المتأخرة للنشاطات المكونة لشبكة المثال الثاني السابق.

الحل:

1- حساب البدايات المتأخرة للحوادث.

لدينا البداية المبكرة للحادث 6 هي: $ES_6 = 12$ (معروفة من إجراء الحساب إلى الأمام لنفس المثال).

وهي تساوي البداية المتأخرة لنفس هذا الحادث، أي:

$LS_6 = ES_6 = 12$

$LS_4 = \binom{min}{z=6} \{LS_{46}\} = min\ \{LC_{46} - D_{46}\}$

$= min\ \{LS_6 - D_{46}\} = 12 - 3 = 9$

$LS_5 = \binom{min}{z=4} \{LS_{54}\} = min\ \{LC_{54} - D_{54}\} = 9 - 3 = 6$

$LS_3 = \binom{min}{z=4} \{LS_{34}\} = min\ \{LC_{34} - D_{34}\} = 9 - 3 = 6$

$LS_2 = \binom{min}{z=3,5} \{LS_{23}\ ,\ LS_{25}\} = min\ \{LC_{23} - D_{23}\ , LC_{25} - D_{25}\}$

$= min\ \{6 - 4\ , 6 - 2\} = 2$

$LS_1 = \binom{min}{z=2,} \{LS_{12}\} = min\{LC_{12} - D_{12}\} = 2 - 2 = 0$

2- النهايات المتأخرة للنشاطات:

$LC_{46} = LS_6 = 12$ $\qquad LC_{25} = LS_5 = 6$

$LC_{54} = LS_4 = 9$ $\qquad LC_{23} = LS_3 = 6$

$LC_{34} = LS_4 = 9$ $\qquad LC_{12} = LS_2 = 2$

3- البدايات المتأخرة للنشاطات:

$LS_{46} = LC_{46} - D_{46} = LS_6 - D_{46} = 12 - 3 = 9$

$LS_{54} = LC_{54} - D_{54} = LS_4 - D_{54} = 9 - 3 = 6$

$LS_{34} = LC_{34} - D_{34} = LS_4 - D_{34} = 9 - 3 = 6$

$LS_{25} = LC_{25} - D_{25} = LS_5 - D_{25} = 6 - 2 = 4$

$LS_{23} = LC_{23} - D_{23} = LS_3 - D_{23} = 6 - 4 = 2$

$LS_{12} = LC_{12} - D_{12} = LS_2 - D_{12} = 2 - 2 = 0$

ثالثا: تحديد المسار الحرج وحساب الأوقات الاحتياطي

المسار الحرج:

بعد الانتهاء من الحساب إلى الأمام وإلى الخلف لكل نشاط، نستطيع أن نحسب الوقت الاحتياطي المتاح لكل منهم وتحديد المسار الحرج.

نقول أن النشاط (**j,z**) يقع على المسار الحرج إذا تحققت الشروط التالية:

1- الوقت المبكر لبدايته = الوقت المسموح التأخر به لبدايته.

أي: $ES_{jz} = LS_{jz}$

2- الوقت المبكر لنهايته = الوقت المسموح التأخر به لنهايته.

أي: $EC_{jz} = LC_{jz}$

3- أو إذا كان: $EC_{jz} - ES_{jz} = LC_{jz} - LS_{jz} = D_{jz}$

- في كل شبكة يوجد على الأقل مسار حرج واحد.
- كل المسارات في الشبكة يمكن أن تكون حرجة.
- كل المسارات الحرجة تبدأ من الحادث الابتدائي للشبكة وتنتهي عند الحادث النهائي لها.
- المسار الحرج هو مسار متصل (غير منقطع).
- مجموع مدد النشاطات الواقعة على المسار الحرج تعطينا مدة إنجاز المشروع.
- نستطيع أن نركز الموارد على النشاطات الحرجة وذلك بتحويل الوسائل من النشاطات غير الحرجة إلى النشاطات الحرجة.

رابعا: الوقت الاحتياطي الكلي(T.F.)

الوقت الاحتياطي (الفائض) الكلي لنشاط ما هو المدة الزمنية التي يمكن أن نؤخر بها بداية (أو نمدد مدة) تنفيذ هذا النشاط بدون ما نؤثر على مدة نهاية المشروع ككل.

لهذا فإذا ما استهلك نشاط ما وقته الاحتياطي الكلي، فإن النشاط (أو بعض النشاطات) التي تأتي بعده يمكن أن تصبح حرجة، وربما تظهر مسارات حرجة أخرى.

وفعلا إذا ما أخرنا بداية تنفيذ نشاط ما لمدة تساوي وقته الاحتياطي الكلي، فهذا النشاط لا يصبح لديه بعد ذلك أي وقت احتياطي، أي يصبح نشاط حرج وأيضا بعض النشاطات التي تأتي بعده.

الوقت الاحتياطي الكلي= البداية المتأخرة لنشاط ما – البداية المبكرة له

أي: $T.F= LS_{jz} - ES_{jz}$

أو النهاية المتأخرة لهذا النشاط– النهاية المبكرة له.

أي: $TF = LC_{jz} - EC_{jz}$

إن تأخير بداية تنفيذ (أو تمديد مدة) نشاط ذو وقت احتياطي كلي يؤدي إلى تأخير بداية تنفيذ النشاط الموالي له ولكن بدون أن يؤثر على مدة انتهاء المشروع ككل.

بعبارة أخرى الوقت الاحتياطي الكلي هو المدة التي يمكن أن نحرك فيها تنفيذ نشاط ما بدون أن يؤثر على مدة إنجاز المشروع ككل.

إن كل النشاطات التي لا تقع على المسار الحرج بصفة منطقية تمتلك وقتا احتياطيا (فائضا) كليا.

الوقت الاحتياطي يلعب دورا مهما في تخفيض تكاليف إنجاز النشاطات غير الحرجة، وفعلا فإذا كان نشاط ما يملك وقتا احتياطيا ما فإننا نستطيع أن نمدد (أو نخفض في سرعة) تنفيذ هذا النشاط، وهذا ما يتطلب توفير وسائل أقل مما كان مخططا، وبالتالي تحمل تكاليف أقل.

خامسا: الوقت الاحتياطي الحر (.F.F):

الوقت الاحتياطي (الهامش الزمني) الحر لأي نشاط هو المدة القصوى التي نستطيع أن نؤخر بها بداية إنجاز هذا النشاط بدون ما نؤثر (نؤخر) على البداية

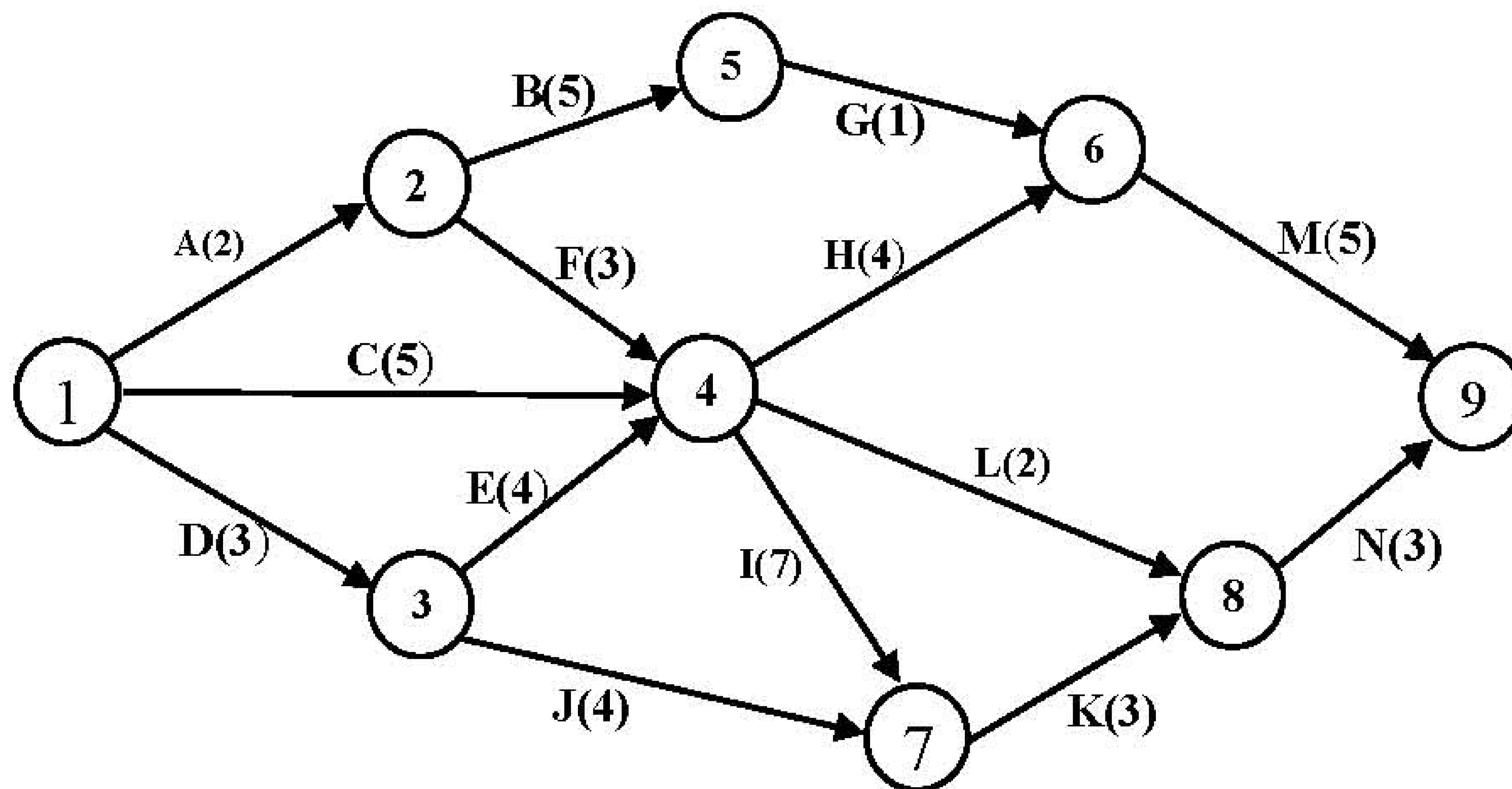
المبكرة للحادث الذي يأتي بعده. بعبارة أدق، إذا ما أخرنا تنفيذ نشاط ما أو مددنا إنجازه لمدة تساوي وقته الاحتياطي الحر، فلا يترتب على هذا تأثير سلبي (تأخير) على بداية إنجاز النشاط الموالي له. فالأوقات المبكرة والمتأخرة للنشاطات الأخرى تبقى كما هي، وبالتالي لا تتأثر بذلك مدة إنجاز المشروع ككل.

الوقت الاحتياطي الحر لنشاط ما = الفرق بين الوقت المبكر لبداية الحادث الذي يصب فيه هذا النشاط (ES_z) والنهاية المبكرة لهذا النشاط ($Ec_{j,z}$).

أي: $FF_{jz} = ES_z - EC_{jz}$.

إذا كنا ا نستطيع تأخير تنفيذ أي نشاط حرج، لأن ذلك سيؤدي إلى تأخير مماثل (بنفس النسبة) في مدة تنفيذ المشروع ككل، فإنه من الواضح أن أي نشاط غير حرج يستطيع على العكس، إما أن يبدأ مباشرة بعد انتهاء النشاطات السابقة له وإما أن يتأجل أو يمدد في إنجازه لمدة تساوي وقته الاحتياطي الكلي.

لتكن لدينا شبكة إنجاز مشروع ما:



نلاحظ مثلا أن النشاط (5) **M** يمكن له أن يبدأ بعد **11** أسبوعا من بداية المشروع، أي بعد انتهاء (**G,H**) ولكن مدة إنجازه **5** أسابيع فقط، فنستطيع إذن إذا أردنا أن نبدأ في تنفيذه إما بعد **15** أسبوعا– وهو آخر أجل لبداية إنجازه– حتى ينتهي تماما مع نهاية آخر نشاط للمسار الحرج، وإما أن نطيل في مدة إنجازه بأربعة أسابيع فتصبح مدة إنجازه (**9** أسابيع).

فهذه المدة (**4** أسابيع هنا) نسميها بالوقت (الهامش) الاحتياطي **الحر**، وهي التي نستطيع أن نؤخر بها أو نمدد في مدة إنجاز النشاط المذكور بدون ما يؤثر ذلك على بداية الحادث الذي يأتي بعده وبالتالي لا يؤثر على مدة إنجاز المشروع ككل.

نفس الشيء بالنسبة للنشاط (2) **L** أيضا، فهو يمكن له أن يبدأ بعد **7** أسابيع من بداية المشروع، أي بعد انتهاء (**F,C,E**) وينتهي عندئذ بعد أسبوعين، أي بعد **9** أسابيع من بداية المشروع، ولكن النشاط الذي يأتي بعده لا يبدأ إلا بعد **17** أسبوعا، إذن فهو عنده مدة **8** أسابيع كوقت احتياطي، هذا الوقت الاحتياطي هو **حر** لأنه بإمكاننا أن نؤخر في بداية تنفيذ النشاط (**L**) أو نمدد في مدة إنجازه ب **8** أسابيع بدون أن نؤثر على تاريخ بداية النشاط الموالي له وهو(**N**).

لكن لو أخذنا النشاط السابق للنشاط (**L**) وهو النشاط (**C**) مثلا، فهذا النشاط من النشاطات التي يبدأ بها المشروع، نلاحظ أنه بإمكاننا أن نؤخر في بداية تنفيذه أو نمدد في مدة إنجازه ب **2**. أسبوع وتصبح المدة التي يستغرقها إنجاز هذا النشاط في هذه الحالة هي **7** أسابيع.

فالمدة **2** أسابيع المتاحة للنشاط (**C**) في هذه الحالة هي وقت احتياطي حر لأن هذا التمديد أو التأخير لا يؤدي إلى تأخير بداية النشاط (**L**) و لا (**I**) ولا (**H**).

مثال 1: نرجع إلى المثال الأول السابق ونحدد المسار الحرج والنشاطات المكونة له، ثم نحدد المسارات غير الحرجة والأوقات الاحتياطية المتاحة لها.

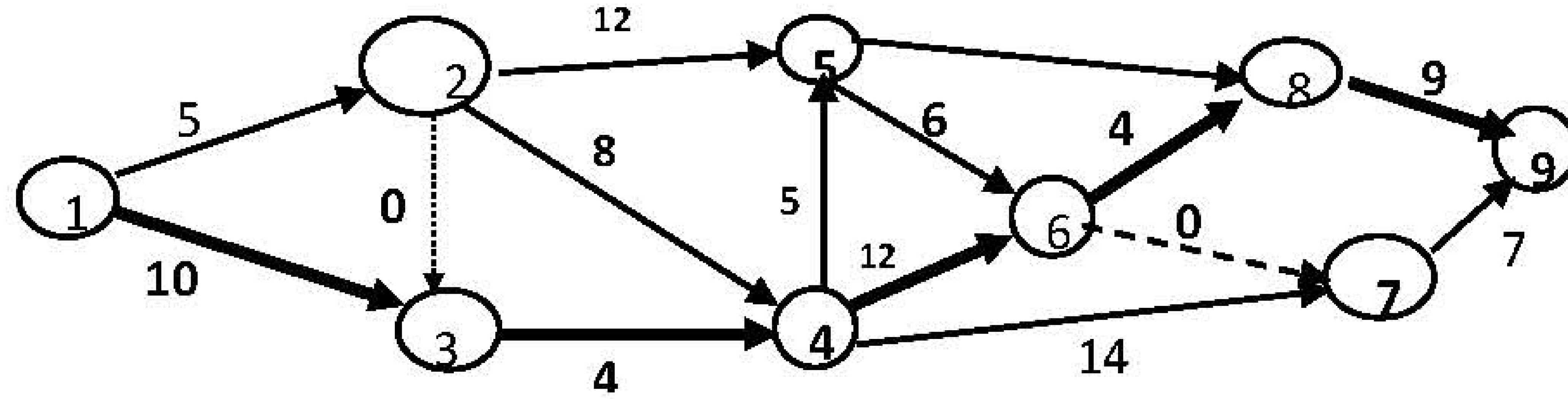
بالنسبة لهذا المثال، لقد أجرينا سابقا الحساب إلى الأمام الذي أعطانا البدايات والنهايات المبكرة للنشاطات (**ES_{ij} , EC_{ij}**)، وأجرينا كذلك الحساب إلى الخلف الذي يعطي البدايات والنهايات المتأخرة للنشاطات (**LS_{ij} , LC_{ij}**). يبقى من أجل أن نعرف المسار الحرج وغير الحرج أن نحسب (FF) و (TF).

$TF_{12} = LS_{12} - ES_{12} = 1 - 0 = 1$	$TF_{46} = LS_{46} - ES_{46} = 14 - 14 = 0$
$TF_{13} = LS_{13} - ES_{13} = 0 - 0 = 0$	$TF_{47} = LS_{47} - ES_{47} = 18 - 14 = 4$
$TF_{23} = LS_{23} - ES_{23} = 10 - 5 = 5$	$TF_{56} = LS_{56} - ES_{56} = 20 - 19 = 1$
$TF_{24} = LS_{24} - ES_{24} = 6 - 5 = 1$	$TF_{67} = LS_{67} - ES_{67} = 32 - 26 = 6$
$TF_{25} = LS_{25} - ES_{25} = 8 - 5 = 3$	$TF_{68} = LS_{68} - ES_{68} = 26 - 26 = 0$
$TF_{34} = LS_{34} - ES_{34} = 10 - 10 = 0$	$TF_{79} = LS_{79} - ES_{79} = 32 - 28 = 4$
$TF_{45} = LS_{45} - ES_{45} = 15 - 14 = 1$	$TF_{89} = LS_{89} - ES_{89} = 30 - 30 = 0$
$FF_{12} = ES_2 - EC_{12} = 5 - 5 = 0$	$FF_{46} = ES_6 - EC_{46} = 26 - 26 = 0$
$FF_{13} = ES_3 - EC_{13} = 10 - 10 = 0$	$FF_{47} = ES_7 - EC_{47} = 28 - 28 = 0$
$FF_{23} = ES_3 - EC_{23} = 10 - 5 = 5$	$FF_{56} = ES_6 - EC_{56} = 26 - 25 = 1$
$FF_{24} = ES_4 - EC_{24} = 14 - 13 = 1$	$FF_{67} = ES_7 - EC_{67} = 28 - 26 = 2$
$FF_{25} = ES_5 - EC_{25} = 19 - 17 = 2$	$FF_{68} = ES_8 - EC_{68} = 30 - 30 = 0$
$FF_{34} = ES_4 - EC_{34} = 14 - 14 = 0$	$FF_{79} = ES_9 - EC_{79} = 39 - 35 = 4$
$FF_{45} = ES_5 - EC_{45} = 19 - 19 = 0$	$FF_{85} = ES_9 - EC_{89} = 39 - 39 = 0$

الجدول الإجمالي:

النشاط(j,z)	مدة النشاط D(j,z)	المبكرة		المتأخرة		TF	FF
		البداية $ES_{(j,z)}$	النهاية $EC_{(j,z)}$	البداية $LS_{(j,z)}$	النهاية $LC_{(j,z)}$		
1 – 2	5	0	5	1	6	1	0
1 – 3	10	0	10	0	10	0	0
2 – 3	0	5	5	10	10	5	5
2 – 4	8	5	13	6	14	1	1
2 – 5	12	5	17	8	20	3	2
3 – 4	4	10	14	10	14	0	0
4 – 5	5	14	19	15	20	1	0
4 – 6	12	14	26	14	26	0	0
4 – 7	14	14	28	18	32	4	0
5 – 6	6	19	25	20	26	1	1
6 – 7	0	26	26	32	32	6	2
6 – 8	4	26	30	26	30	0	0
7 – 9	7	28	35	32	39	4	4
8 – 9	9	30	39	30	39	0	0

ولتوضيح المسار الحرج على الرسم، نرسم شبكة إنجاز المشروع.



يتضح أن أنشطة المسار الحرج هي الأنشطة (**1→ 3**، **3→4**، **4→6**، **6→8**، **8→9**)، ومجموع مدة إنجاز هذا المشروع هي مجموع مدد الأنشطة الحرجة، أي **(9+4+12+4+10) = 39**.

مثال2:

نأخذ المثال الثاني السابق، ونجيب على نفس الأسئلة. سوف نستعمل نفس النتائج التي توصلنا إليها سابقا في الحساب إلى الأمام والحساب إلى الخلف، نستعملها لمعرفة النشاطات التي تشكل المسار الحرج (النشاطات الحرجة) والنشاطات غير الحرجة.

نجري أولا حساب الوقت الاحتياطي الكلي و الحر لكل نشاط.

$TF_{12} = LS_{12} - ES_{12} = 0 - 0 = 0$

$TF_{23} = LS_{23} - ES_{23} = 2 - 2 = 0$

$TF_{25} = LS_{25} - ES_{25} = 4 - 2 = 2$

$TF_{34} = LS_{34} - ES_{34} = 6 - 6 = 0$

$TF_{54} = LS_{54} - ES_{54} = 6 - 4 = 2$

$TF_{46} = LS_{46} - ES_{46} = 9 - 9 = 0$

$FF_{12} = ES_{2} - EC_{12} = 2 - 2 = 0$

$FF_{23} = ES_{3} - ES_{23} = 6 - 6 = 0$

$FF_{25} = ES_{5} - EC_{25} = 4 - 4 = 0$

$FF_{34} = ES_4 - ES_{34} = 9 - 9 = 0$

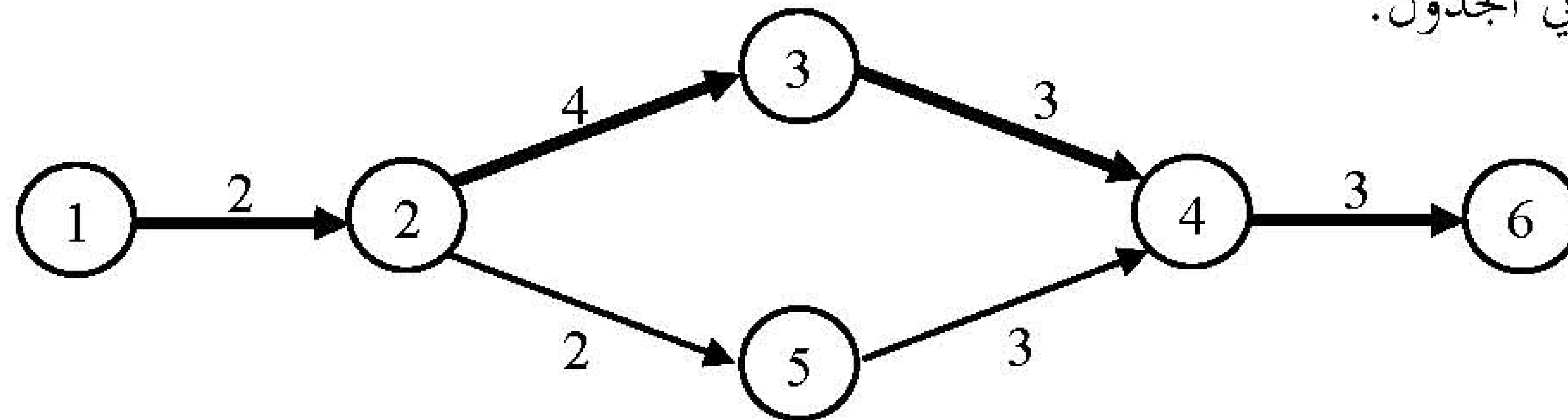
$FF_{54} = ES_4 - EC_{54} = 9 - 7 = 2$

$FF_{46} = ES_6 - EC_{46} = 12 - 12 = 0$

ثم نضع الجدول الممثل لكل المعلومات التي تحصلنا عليها لحد الآن.

النشاط (j,z)	مدة النشاط $D_{(j,z)}$	المبكرة البداية $ES_{(j,z)}$	المبكرة النهاية $EC_{(j,z)}$	المتأخرة البداية $LS_{(j,z)}$	المتأخرة النهاية $LC_{(j,z)}$	TF	FF
1–2	2	0	2	0	2	0	0
2–3	4	2	6	2	6	0	0
2–5	2	2	4	4	6	2	0
3–4	3	6	9	6	9	0	0
4–5	3	4	7	6	9	2	2
4–6	3	9	12	9	12	0	0

نرسم الآن شبكة تنفيذ المشروع ونوضح عليها المسار الحرج كما هو معطى في الجدول:



إذن المسار الحرج هو(1←2, 2←3, 3←4, 4←6)، ومدة إنجاز المشروع (وهي تساوي مدة المسار الحرج = **12**).

تعليق على حل هذا المثال:

النشاط **2→5** يمتلك وقتا احتياطيا كليا مقداره **2** أسبوع، لو تأخر هذا النشاط في تنفيذه – نتيجة التأخر في بداية تنفيذه (بداية متأخرة مثلا) أو نتيجة التأخير في الانتهاء منه (انتهاء متأخر)– ماذا يحدث ؟

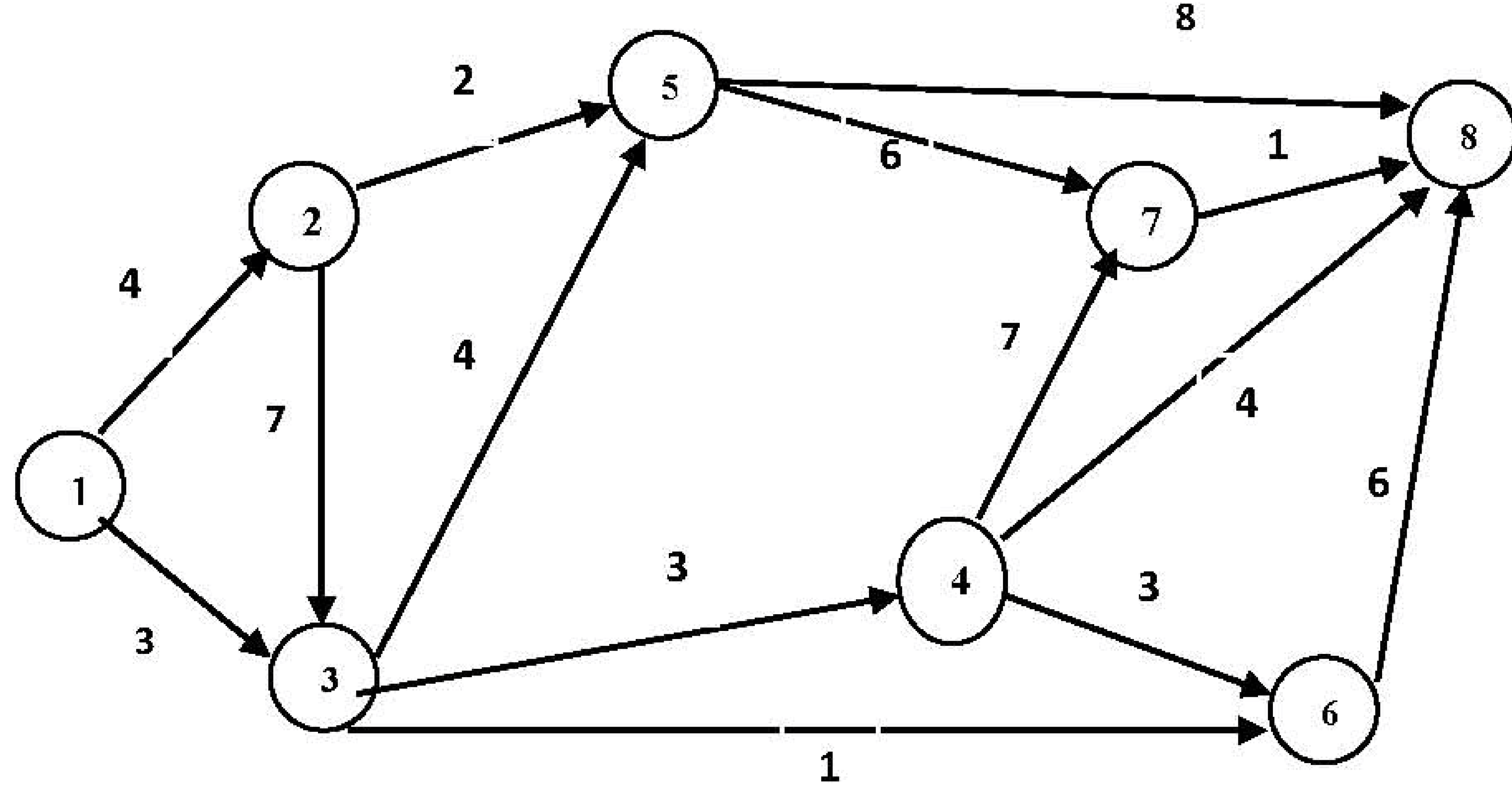
في هذه الحالة فإن وقت بداية الحادث **5** يتأخر بأسبوعين ولا يبدأ إلا بعد **6** أسابيع عوض بعد **4** أسابيع، وبالتالي فالاحتياطي الكلي للنشاط الذي يأتي بعده يصبح يساوي الصفر(يعني ينقص بأسبوعين). من هنا فالنشاط **5→4** يكون قد استهلك احتياطية الزمني الحر(**2** أسبوع).

إذن إذا تأخر تنفيذ النشاط (**2→5**) واستعمل في ذلك وقته الاحتياطي الكلي المتاح (**2** أسبوع) فسوف يؤثر على بداية تنفيذ النشاط الذي بعده وهو **5→4** بأسبوعين، وهذا ما يدلنا على أن هذا النشاط ليس لديه وقت احتياطي **حر** بالرغم من أن لديه وقت احتياطي كلي.

بينما لو لاحظنا النشاط **5→4** مثلا، فنرى انه لو تأخر في تنفيذه بأسبوعين وهو الوقت الكلي (الفائض) المتاح لديه، وينتهي تنفيذه في هذه الحالة بعد **9** أسابيع، فإن ذلك سوف لن يؤثر على بداية النشاط الموالي له **4→6** حيث أن هذا الأخير يبدأ بعد **9** أسابيع. إذن فالنشاط **5→4** لديه وقت احتياطي لكنه **حر** ويساوي **2** أسبوع.

تمارين

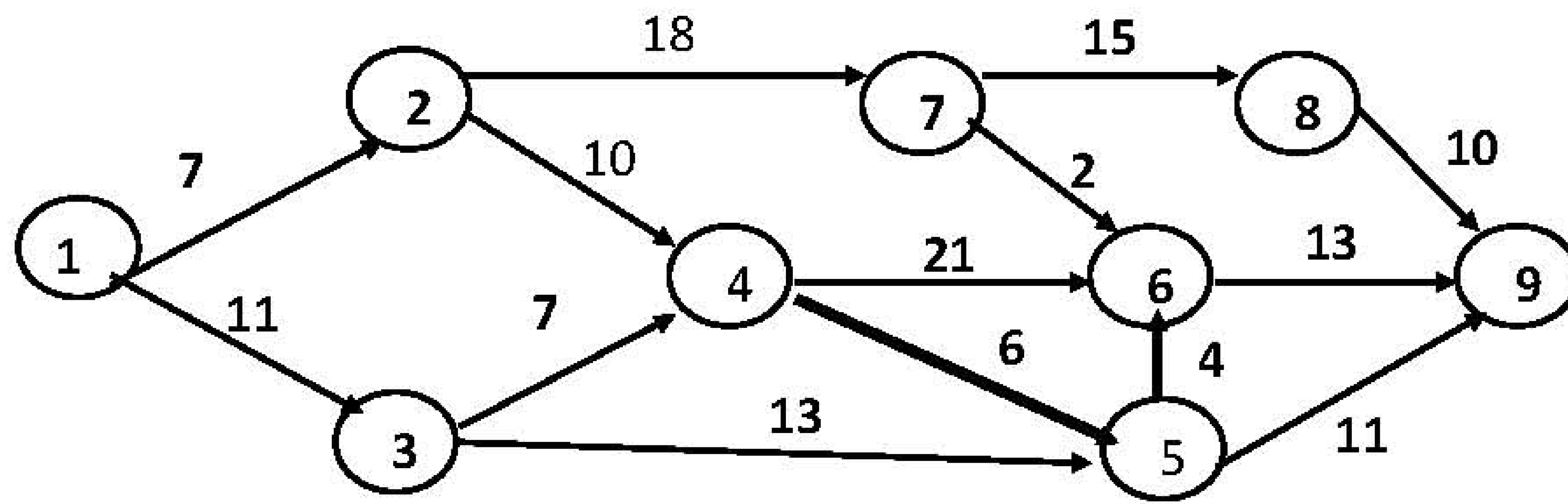
تمرين 1: ليكن المشروع الممثل بالشبكة التالية:



المطلوب : أ- إيجاد المسار الحرج ثم النشاطات المكونة له.

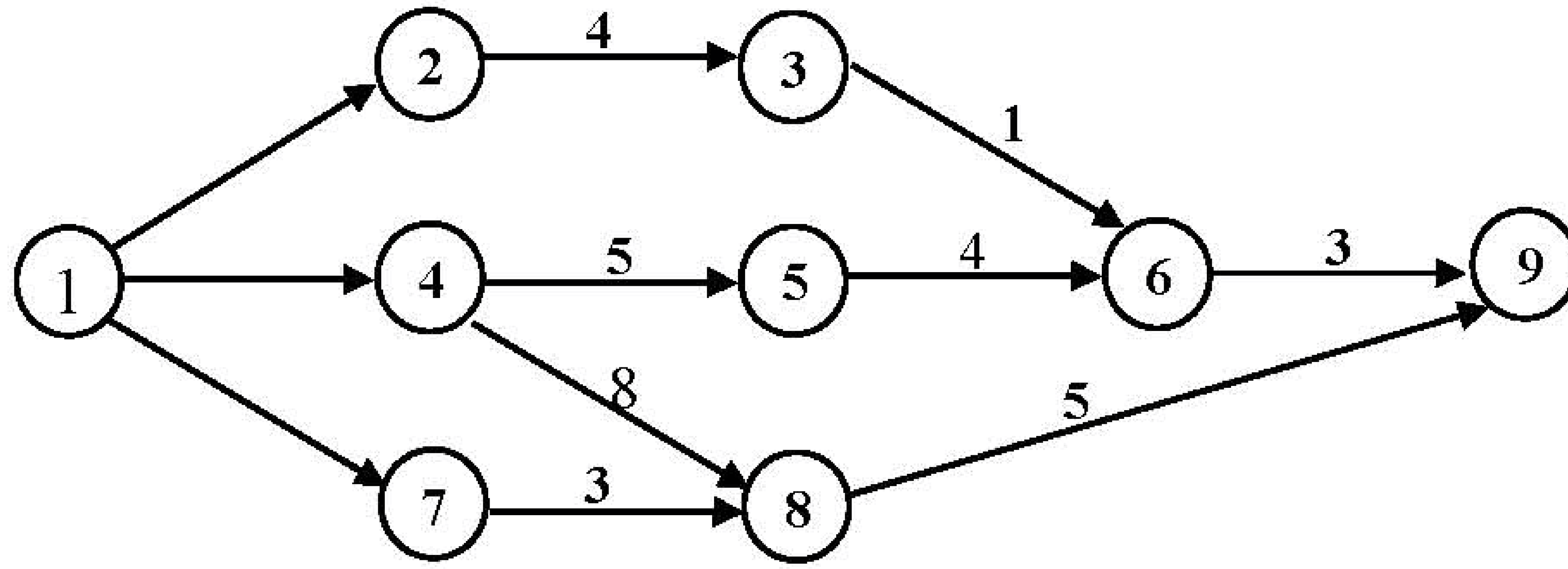
ت- ما هي النشاطات غير الحرجة وما هي الأوقات الاحتياطية المتاحة لها.

تمرين 2: ليكن المشروع الممثل بالشبكة التالية، أجب على نفس السؤال السابق.



الجواب: المسار الحرج هو: 1-3-4-6-9 ومدته 52 أسبوع.

تمرين3: لتكن الشبكة التالية، أجب على نفس الأسئلة السابقة.



النشاطات (**2–1** ، **4–1** ، **7–1**) مددها التنفيذية هي: **2** ، **2** ،**1** على التوالي.

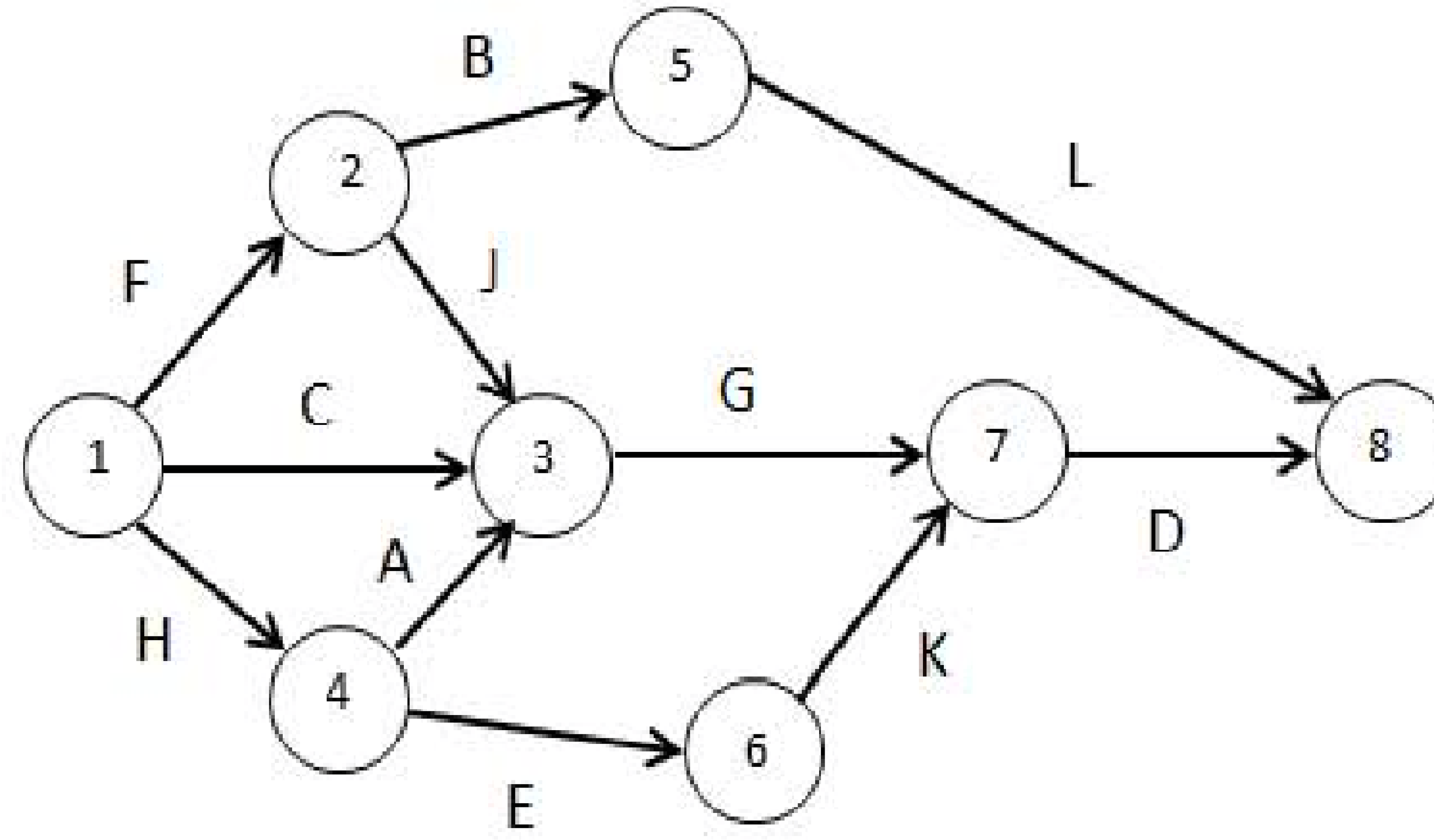
الجواب: المسار الحرج هو: **1–3–8–9** ومدته **15** أسبوع.

تمرين4: لتكن النشاطات الممثلة للمشروع التالي والمدد الزمنية المتوقعة لتنفيذ كل نشاط منها (بالأسبوع).

كون شبكة إنجاز هذا المشروع ثم أحسب مساره الحرج.

A	K	G	D	L	J	B	H	C	F	E	النشاط
H	E	A,C, J	K,G	B	F	F	– –	– –	– –	H	النشاط السابق له مباشرة
2	2	3	3	3	3	2	6	4	3	3	مدة الإنجاز

الجواب:

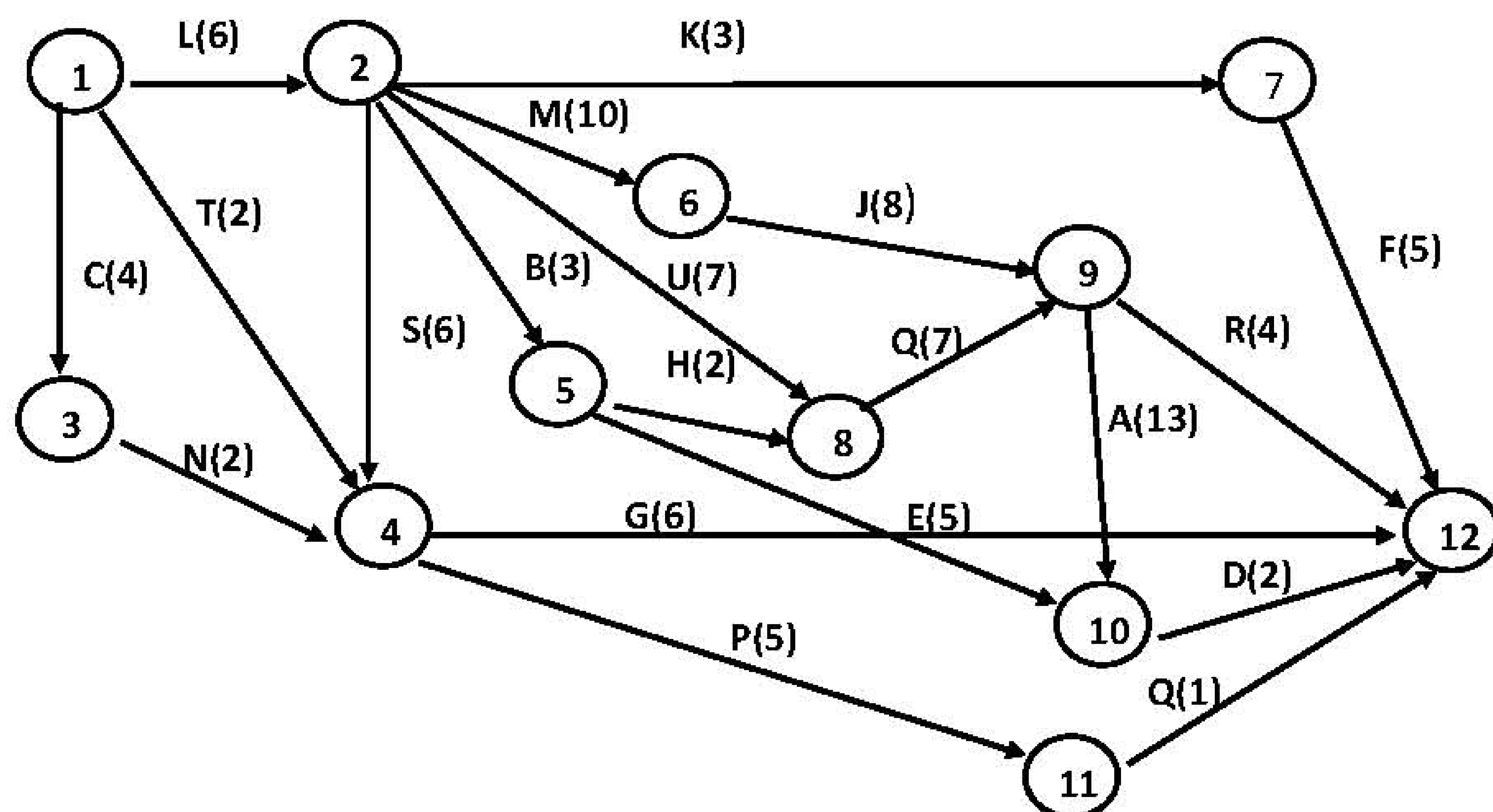


المسار الحرج هو: FJGD ومدته 13 أسبوع.

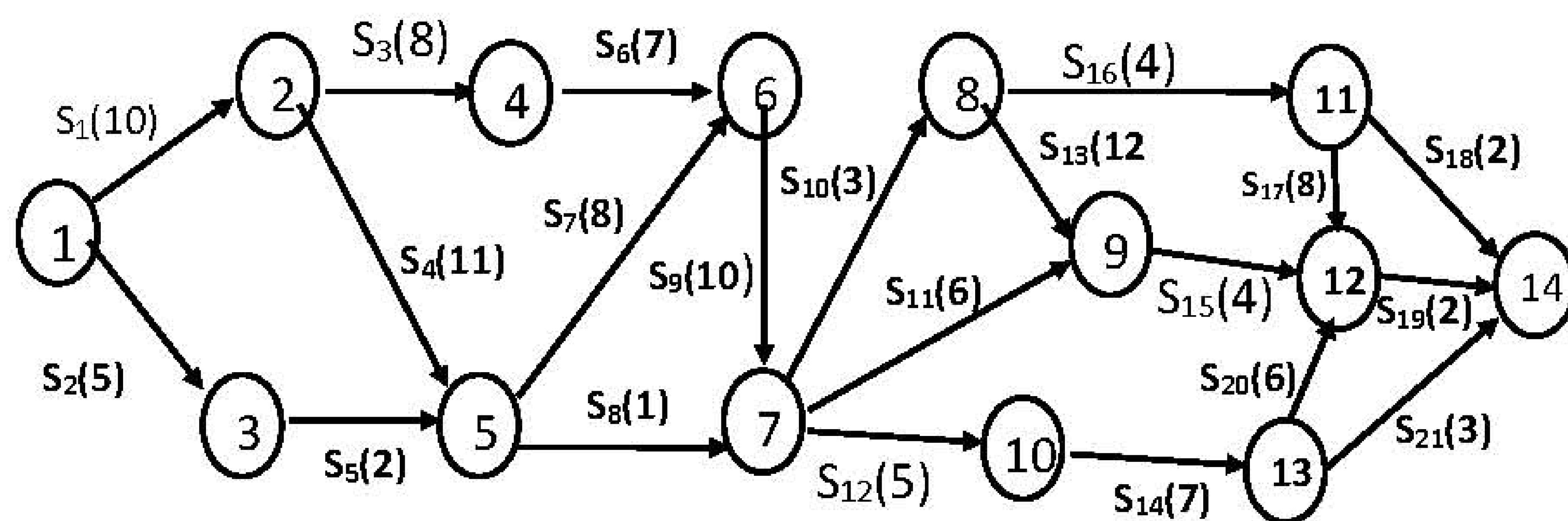
تمرين5: لدينا الشبكة التالية :

أ – أوجد المسار الحرج والنشاطات المكونة له.

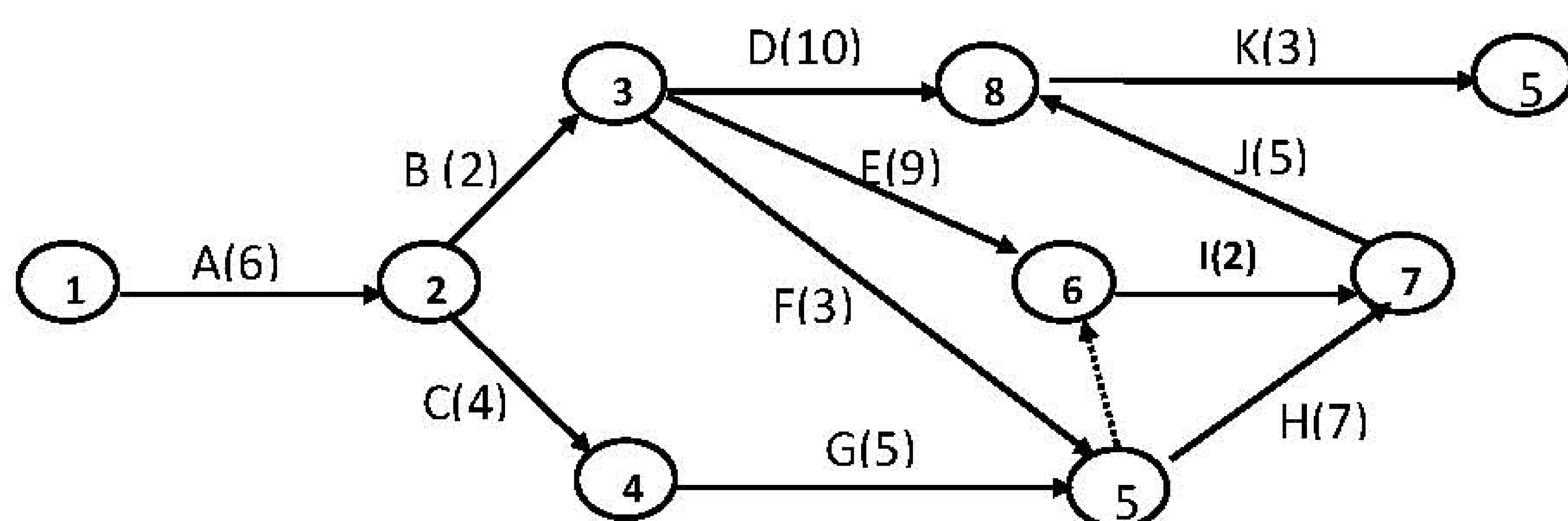
ب– ما هي النشاطات غير الحرجة والأوقات (الاحتياطية) المتاحة لها.



تمرين 6: احسب المسار الحرج للشبكة التالية.



تمرين 7: احسب المسار الحرج والأوقات الاحتياطية للمشروع الممثل بالشبكة التالية:



الفرع الثالث: علاقة الزمن بالتكلفة

في المرحلة السابقة اكتفينا بدراسة حساب مدة تنفيذ المشروع واستخراج المسار الحرج وأنشطته، وكذلك الأنشطة غير الحرجة والوقت الاحتياطي المتاح لها، ورأينا أيضا أن تنفيذ كل نشاط من نشاطات المشروع يتطلب صرف أموال واستعمال وسائل (أي تحمل تكاليف)، كما افترضنا أن الوقت المطلوب لتنفيذ نشاط ما كان ثابتا.

لكن في الحقيقة تكلفة تنفيذ هذا النشاط تعتمد على كثير من العوامل من أهمها المدة الزمنية التي يستغرقها تنفيذ هذا النشاط، وكذلك ثمن شراء الموارد المستعملة في التنفيذ وكميتها.

توجد إذن علاقة مباشرة بين مدة تنفيذ أي نشاط ومستوى تكلفته، وفعلا عادة ما يؤدي تخفيض آجال تنفيذ نشاط ما إلى تحمل تكلفة إضافية وذلك بإضافة موارد ووسائل إضافية (ساعات عمل إضافية، تأجير عمال إضافيين، استخدام وسائل وموارد بكميات أكبر....).

على سبيل المثال فإن عملية دهان منزل معين قد يتطلب **10** أيام، ولكن يمكن اختصار هذا الوقت إذا أضفنا عدد أكبر من العمال لهذا العمل أو (و) إذا طلبنا من العمال الحاليين أن يعملوا ساعات إضافية وكذلك زيادة مواد الطلاء وغيره من الوسائل المستعملة من عملية الطلاء هذه. فتخفيض وقت التنفيذ أكثر من العادي يترتب عليه تحمل تكلفة إضافية.

إذن إذا أردنا أن نخفض (نقلص) مدة إنجاز مشروع ما، فالسؤال الذي يطرح هو: كم سيكلف هذا التخفيض؟ ومن أجل تقدير كم يكلف هذا التخفيض في مدة إنجاز المشروع، نستعمل البيانات التالية:

المدة العادية (**durée Normale**) (**D_n**) لتنفيذ كل نشاط.

المدة السريعة (**durée accélérée**) (**D_A**) لتنفيذ كل نشاط.

من هنا نعرف حدود المدة الزمنية القصوى المتاحة لتخفيض مدة تنفيذ كل نشاط (**la limite d'accélération**)، وذلك بطرح المدة السريعة لتنفيذ النشاط من مدة تنفيذه العادية، أي (**D_n–D_A**).

تكلفة المدة العادية لإنجاز النشاط (**Cout Normal**)

تكلفة المدة السريعة لإنجاز هذا النشاط (**Cout d'accélération**)

ثم نحسب الزيادة في التكلفة الناتجة عن تخفيض مدة تنفيذ كل نشاط إلى أقصاها، وذلك بطرح التكلفة العادية للنشاط من تكلفة تنفيذه السريعة (**C_A- C_n**).

ثم نحسب الزيادة في التكلفة التي سوف تتحملها المؤسسة والناتجة على تخفيض (الإسراع) في مدة تنفيذ كل نشاط بوحدة زمنية واحدة (ساعة، أسبوع، شهر، سنة...)، وذلك بقسمة الفرق في تكلفة كل نشاط على الفرق في مدة تنفيذ هذا النشاط. أي: **C_A–C_n / D_n–D_A**.

ثم نقوم بتكوين جدول يشمل كل هذه المعطيات.

النشاط	عادي NORMAL		سريع accéléré		مدة التخفيض القصوى	الزيادة في التكلفة	الزيادة في التكلفة لكل وحدة زمنية
$D_{(j,z)}$	المدة **durée** (1)	التكلفة **cout** (2)	المدة **durée** (3)	التكلفة **cout** (4)			

الآن نكون قد حصلنا على التكلفة الإضافية التي تتحملها المؤسسة المنجزة للمشروع، الناتجة عن تخفيضها لمدة تنفيذ كل نشاط بوحدة زمنية واحدة.

نفترض الآن أن المؤسسة قررت تخفيض مدة إنجاز المشروع، فيلزم لتحقيق ذلك استخدام البرنامج السريع لبعض الأنشطة التي يتضمنها المشروع. والسؤال الذي يطرح هنا هو: ما هي هذه الأنشطة التي يجب أن نخفض مدة تنفيذها قبل غيرها، أو بعبارة أخرى ما هي الأنشطة التي يجب الإسراع في تنفيذها قبل غيرها ؟

لقد رأينا أن مدة تنفيذ الأنشطة الحرجة (أنشطة المسار الحرج) هي التي تتحكم في مدة إنجاز المشروع ككل، أي هي التي تشكل أقصى مدة مثلى لإنجاز المشروع، ومن هنا فإن تقليص مدة تنفيذ المشروع الإجمالية تعني مبدئيا تقليص مدد تنفيذ نشاطاته الحرجة.

الآن من بين كل النشاطات الحرجة، ما هي تلك التي نختارها لنبدأ في إسراع مدة تنفيذها قبل غيرها ؟ يعني ما هو النشاط الحرج الذي نبدأ بإنقاص مدة تنفيذه قبل غيره، أم هل هذا بدون اعتبار ؟

في الحقيقة نختار النشاط الذي يكون تقليص مدة تنفيذه يتطلب زيادة في تكلفة إنجاز المشروع أقل من غيره (أي نختار أرخص تخفيض)، لهذا وقبل إجراء عملية التقليص يجب أن نعرف المسار الحرج والنشاطات المكونة له ومددها الزمنية وكذلك الأوقات الاحتياطية المتاحة للمسارات غير الحرجة.

نبدأ في عملية التخفيض وذلك بدءا بالنشاط الأرخص، ولكن نخفض بكم ؟ أي ما هي المدة الزمنية التي نخفض بها تنفيذ نشاط ما ؟ هل بكل المدة المتاحة لتخفيض كل نشاط أم نخفض بالوحدة الزمنية. في الحقيقة التخفيض يجب أن يكون بالوحدة الزمنية (باليوم، بالشهر، بالسنة..) لماذا ؟

لأننا لو قلصنا النشاط الأرخص بكل المدة الزمنية المتاحة لتخفيضه، نخشى أن يظهر لنا بعد ذلك مسارا حرجا آخرا وبالتالي ربما يكون جزء من المدة المخفضة من ذلك النشاط غير ضرورية وغير مجدية. لذلك نخفض بالتدريج بالوحدة الزمنية ونتتبع في كل مرة ظهور مسار حرج جديد.

من أجل أن نتمكن من ذلك نقوم مسبقا بترتيب المسارات الأخرى (غير الحرجة) في الشبكة حسب الوقت الاحتياطي المتاح لهذه المسارات، أي حسب قربها من المسار الحرج الحالي. فأقرب مسار إلى المسار الحرج هو ذلك الذي يتوفر على أقل وقت احتياطي، ثم نقارن مدته مع مدة المسار الحرج (وهي تكافئ مدة تنفيذ المشروع)، فنستخرج المدة التي يلزم أن نخفض بها الأنشطة الرخيصة للمسار الحرج الحالي حتى يتساوى هذا المسار الحرج مع أقرب المسارات غير الحرجة إليه. نعيد الكرة مع المسار الحرج الجديد والمسار الأقرب إليه وهكذا.

مثال1:

الجدول التالي يعطي قائمة النشاطات التي يتكون منها مشروع ما والأزمنة العادية والسريعة لتنفيذ كل نشاط من أنشطة المشروع المذكور، و كذلك التكاليف العادية و السريعة لتنفيذ كل نشاط.

النشـاطz,j	النشـاط السابق له مباشرة	العاديـــة		السريعـــة	
		المدة (أسبوع)	التكلفة (مليون دينار)	المدة (أسبوع)	التكلفة (مليون دينار)
(B) 1_2	--	7	70	6	90
(A) 1_3	--	5	100	4	120
(F) 2_5	B	4	50	1	170
(C) 3_4	A	3	20	1	40
(E) 3_5	A	10	80	8	110
(D)3_6	A	6	30	5	40
(G) 4_6	C	4	100	2	200
(I) 5_7	E,F	5	5	3	70
(H) 6_7	G,D	2	60	1	100

كوّن شبكة تنفيذ المشروع، ثم استخرج مقدار الزيادة في التكاليف التي يجب أن تتحملها المؤسسة صاحبة المشروع إذا أرادت أن تخفض مدة إنجاز المشروع بـ **(6)** أسابيع فقط، و ما هي الزيادة في التكاليف إذا أرادت هذه المؤسسة تخفيض مدة الإنجاز إلى أقصى حد ممكن.

الحـل:

نقوم بتجميع المعلومات الضرورية للحل في جدول جديد:

النشاط	العادية		السريعة		المدة الكلية المتاحة للتخفيض (أسبوع)	الزيادة في التكلفة الكلية(م.د)	الزيادة في التكلفة لكل وحدة زمنية (م.د)
	المدة (أسبوع)	التكلفة (م.د)	المدة (أسبوع)	التكلفة (م.د)			
1–2	7	70	6	90	1	20	20
1–3	5	100	4	120	1	20	20
2–5	4	50	1	170	3	120	40
3–4	3	20	1	40	2	20م.د	10
3.–5	10	80	8	110	2	30م.د	15
3–6	6	30	5	40	1	10م.د	10
4.– 6	4	100	2	200	2	100م.د	50
5.– 7	5	50	3	70	2	20م.د	10
6.–7	2	60	1	100	1	40م.د	40
∑	20	560					

عرفنا الآن التكلفة الإضافية لتخفيض مدة تنفيذ كل نشاطبوحدة زمنية واحدة، و نلاحظ أن أرخص الأنشطة هي الأنشطة (**5 – 7** ، **3 – 6** ، **3 – 4**)، لكن نحن لا نعرف ما إذا كانت هذه الأنشطة من ضمن النشاطات الحرجة أو لا. فيجب إذن أن نحسب المسار الحرج العادي و المدة العادية المحدد له، ولمعرفة ذلك يجب أن نجري الحساب إلى الأمام و إلى الخلف.

1- الحساب إلى الأمام:

أ. الأزمنة المبكرة لبداية الحوادث (Es_j):

$ES_1 = 0$

$ES_2 = \binom{\max}{j=1}\{EC_{j,2}\} = \max\{ES_{12} + D_{12}\} = \{0 + 7\} = 7$

$ES_3 = \binom{\max}{j=1}\{EC_{j,3}\} = \max\{ES_{13} + D_{13}\} = \{0 + 5\} = 5$

$ES_4 = \binom{\max}{j=3}\{EC_{j,4}\} = \max\{ES_{34} + D_{34}\} = \{5 + 3\} = 8$

$ES_5 = \binom{\max}{j=2,3}\{EC_{j,5}\} = \max\{ES_{25} + D_{25}, ES_{35} + D_{35}\}$
$= \max\{7 + 4, 5 + 10\} = 15$

$ES_6 = \binom{\max}{j=3,4}\{EC_{j,6}\} = \max\{ES_{36} + D_{36}, ES_{46} + D_{46}\}$
$= \max\{5 + 6, 8 + 4\} = 12$

$ES_7 = \binom{\max}{j=5,6}\{EC_{j,7}\} = \max\{ES_{57} + D_{57}, ES_{67} + D_{67}\}$
$= \max\{15 + 5, 12 + 2\} = 20$

ب. حساب البدايات المبكرة للنشاطات:

$ES_{12} = ES_1 = 0$
$ES_{13} = ES_1 = 0$
$ES_{25} = ES_2 = 7$
$ES_{34} = ES_3 = 5$
$ES_{35} = ES_3 = 5$
$ES_{36} = ES_3 = 5$
$ES_{46} = ES_4 = 8$
$ES_{57} = ES_5 = 15$
$ES_{67} = ES_6 = 12$

ج. حساب النهايات المبكرة للنشاطات.

$EC_{12} = ES_{12} + D_{12} = 0 + 7 = 7$
$EC_{13} = ES_{13} + D_{13} = 0 + 5 = 5$
$EC_{25} = ES_{25} + D_{25} = 7 + 4 = 11$
$EC_{34} = ES_{34} + D_{34} = 5 + 3 = 8$
$EC_{36} = ES_{36} + D_{36} = 5 + 6 = 11$
$EC_{46} = ES_{46} + D_{46} = 8 + 4 = 12$
$EC_{57} = ES_{57} + D_{57} = 15 + 5 = 20$
$EC_{67} = ES_{67} + D_{67} = 12 + 2 = 14$

$EC_{35} = ES_{35} + D_{35} = 5 + 10 = 15$

2– الحساب إلى الخلف:.

أ. الأوقات المتأخرة لبداية الحوادث.

$LS_7 = ES_7 = 20$

$LS_6 = \binom{\min}{z=7} \{LS_{6,z}\} = \min \{LC_{67} - D_{67}\} = \{20 - 2\} = 18$

$LS_5 = \binom{\min}{z=7} \{LS_{5,z}\} = \min \{LC_{57} - D_{57}\} = \{20 - 5\} = 15$

$LS_4 = \binom{\min}{z=6} \{LS_{4,z}\} = \min \{LC_{46} - D_{46}\} = \{18 - 4\} = 14$

$LS_3 = \binom{\min}{z=4,5,6} \{LS_{3,z}\} = \min \{LC_{34} - D_{34}, LC_{35} - D_{35}, LC_{36} - D_{36}\}$

$= \min \{14 - 3, 15 - 10, 18 - 6\} = 5$

$LS_2 = \binom{\min}{z=5} \{LS_{2,z}\} = \min \{LC_{25} - D_{25}\} = \{15 - 4\} = 11$

$LS_1 = \binom{\min}{z=2,3} \{LS_{1,z}\} = \min \{LC_{12} - D_{12}, LC_{13} - D_{13}\}$

$= \min \{11 - 7, 5 - 5\} = 0$

ب. حساب البدايات المتأخرة للنشاطات:

$LS_{12} = LC_{12} - D_{12} = 11 - 7 = 4$

$LS_{13} = LC_{13} - D_{13} = 5 - 5 = 0$

$LS_{25} = LC_{25} - D_{25} = 15 - 4 = 11$

$LS_{34} = LC_{34} - D_{34} = 14 - 3 = 11$

$LS_{35} = LC_{35} - D_{35} = 15 - 10 = 5$

$LS_{36} = LC_{36} - D_{36} = 18 - 6 = 12$

$LS_{46} = LC_{46} - D_{46} = 18 - 4 = 14$

$LS_{57} = LC_{57} - D_{57} = 20 - 5 = 15$

$LS_{67} = LC_{67} - D_{67} = 20 - 2 = 18$

ج. حساب النهايات المتأخرة للنشاطات:

$LC_{12} = LS_2 = 11$

$LC_{13} = LS_3 = 5$

$LC_{25} = LS_5 = 15$

$LC_{34} = LS_4 = 14$

$LC_{35} = LS_5 = 15$

$LC_{36} = LS_6 = 18$

$LC_{46} = LS_6 = 18$

$LC_{57} = LS_7 = 20$

$LC_{67} = LS_7 = 20$

نكون الآن جدول استخراج المسار الحرج:

النشاط $j \to z$	المدة العادية $D_{j,z}$	المبكرة			المتأخرة		TF	FF
		البداية $ES_{j,z}$	البداية المبكرة للحادث z	النهاية $EC_{j,z}$	البداية $LS_{j,z}$	النهاية $LC_{j,z}$		
1 - 2 (B)	7	0	7	7	4	11	4	0
1 - 3	5	0	5	5	0	5	0	0
2 - 5	4	7	15	11	11	15	4	4
3 - 4	3	5	8	8	11	14	6	0
3 - 5	10	5	15	15	5	15	0	0
3 - 6 (D)	6	5	12	11	12	18	7	1
4 - 6 (G)	4	8	12	12	14	18	6	0
5 - 7	5	15	20	20	15	20	0	0
6 - 7	2	12	20	14	18	20	6	6

إذا النشاطات المكونة للمسار الحرج هي **(1 ← 3, 3 ← 5, 5 ← 7)** والمسار الحرج هو: **(1 ← 3 ← 5 ← 7)**. ومدته 20 أسبوعا.

نرتب إذن المسارات غير الحرجة على حسب قربها من المسار الحرج (أي بحسب أوقاتها الاحتياطية الكلية)، والمسار الأكثر قربا من المسار الحرج هو المسار (1-2-5-7) ذو الوقت الاحتياطي الكلي لأغلبية نشاطاته (4) ، وهذا يعني أن مدته هي (16) أسبوعا (20-4).

المسار الذي يليه هو (1-3-4-6-7) ذو الوقت الاحتياطي الكلي لأغلبية نشاطاته (6)، هذا يعني أن مدته 14 أسبوعا (20 - 6).

المسار (1-2-5-7) يوضح أن هناك (4) أسابيع كفرق بينه وبين المسار الحرج، وهذا يعني أنه يمكن تخفيض مدة تنفيذ المشروع ب 4 أسابيع كحد أقصى من مدة المسار الحرج (1-3-5-7)، قبل أن يظهر مسار حرج آخر.

كما أشرنا سابقا، نختار للتخفيض من بين أنشطة المسار الحرج، النشاط الأقل تكلفة وهو (5-7)، (بمعنى أن كل أسبوع نخفضه من هذا النشاط يكلف المشروع 10 مليون دينار إضافية)، نخفضه بالأسبوعين المتاحين له للتخفيض كحد أقصى، وتصبح التكلفة الكلية للمشروع بعد هذا التخفيض (بعد إدخال 5- 7 في البرنامج السريع) = 560 + 10.2 = 580 م.د، ويصبح وقت تنفيذ المشروع يساوي 18 أسبوعا.

بقي أسبوعان، وبقي على المسار الحرج نشاطان قابلان للتسريع وهما (1-3)، (3-5). تكلفة تخفيض الأسبوع الواحد في الأول هي (20 م.د)، بينما تكلفة تخفيض الأسبوع الواحد في الثاني هي (15 م.د). نخفض إذا مدة النشاط (3-5) بالأسبوعين المتاحين لتخفيضه، بعد هذا تصبح التكلفة الكلية للمشروع الآن (بعد إدخال 5. 7، 3. 5 في البرنامج السريع) تساوي 580 + 30 = 610 م.د.

الآن نلاحظ أن المسار الحرج الأول أصبحت مدته 16 أسبوعا، ولكن المسار القريب منه والذي كانت مدته 16 أسبوعا أصبحت الآن 14 أسبوعا فقط وذلك نتيجة لأننا خفضنا مدة النشاط (5-7) بأسبوعين، فأدى هذا إلى تخفيض مدة المسار (1-2-5-7) إلى 14 أسبوعا لأن النشاط 5-7 مشترك بين المسارين.

يبقى إذا المسار (1-3-5-7) هو المسار الحرج، والمدة المتاحة لتخفيضه هي 2 أسبوع، من بين أنشطة المسار الحرج القابلة للتسريع هي النشاط (1-3)، والمدة

المتاحة لتخفيضه هي أسبوع واحد، تكلفة تخفيض الأسبوع الواحد من هذا النشاط هي (20 م.د).

تضاف تكلفة إسراع هذا النشاط إلى التكلفة الكلية ، فتصبح = 610 + 20 = 630 م.د.

نلاحظ أنه بالرغم من أننا خفضنا مدة تنفيذ النشاط (1-3) فإن المسار (1–3–5–7) بقي هو المسار الحرج بـ 15 أسبوعاً، وذلك لأن المسارات الأخرى أصبحت مدتها كالتالي: المسار (1-2-5-7) مدته الجديدة هي 14 أسبوعا، المسار (1-3-6-7) مدته 12 أسبوعا والمسار (1-3-4-6-7) مدته 13 أسبوعا.

الآن المسار الحرج قد وصل إلى المدة القصوى المتاحة لتخفيضه **Limite d'accélération**، أي وصل إلى حده السريع الأقصى ولا يمكن تخفيضه أكثر من ذلك، بمعني لقد استهلك كل المدة المسموحة له في التخفيض.

إذا المدة الجديدة لتنفيذ المشروع حسب البرنامج السريع (المقلص) تساوي 15 أسبوعا بتكلفة كلية تساوي 630 م.د.، وهذه أدنى مدة يمكن تخفيض مدة تنفيذ المشروع بها.

مثال2:

نعطي من خلال الجدول التالي قائمة النشاطات الضرورية التي يتطلبها إنجاز مشروع معين، مدد التنفيذ العادية والسريعة لتنفيذ كل نشاط من أنشطة المشروع المشار إليه، و كذلك تكلفة البرنامج العادي والسريع لكل نشاط.

المطلوب:

أولا– تكوين شبكة تنفيذ المشروع؛

ثانيا- حساب التكلفة الإضافية الناتجة عن تخفيض مدة الإنجاز إلى أقصى حد ممكن.

التكلفة (مليون د)		المدة (أسبوع)		النشاط السابق له مباشرة	النشاط j,z
السريعة Ca	العادية Cn	السريعة Da	العادية Dn		
1035	1000	3	4	--	1.– 2
1530	1500	2	3	1.–2	2.–3
1460	1400	2	4	1.–2	2.–4
1320	1300	1	2	2.–3	3.–4
1275	1200	4	7	2.– 3	3.– 5
1020	1000	2	4	2.–4 3–4	4.–5
1320	1300	3	4	2.–4 3–4	4.–6
1530	1500	5	8	2.–4 3–4	4. –7
1140	1100	4	5	3.–5 4–5	5.–7
1225	1200	3	4	4 –6	6–7

الحل:

نقوم بحساب التكاليف الإضافية الناتجة عن تسريع تنفيذ أنشطة المشروع ونلخصها في الجدول التالي:

النشـاط	المدة (أسبوع)		التكلفة (مليون د)		الزيادة في التكلفة الكلية	المدة القصوى المتاحة للتخفيض	التكلفة الكلية الإضافية لكل أسبوع
j,z	العاديـة Dn	السريعة Da	العاديـة Cn	السريعة Ca			
1.– 2	4	3	1000	1035	35	1	35
2.–3	3	2	1500	1530	30	1	30
2.–4	4	2	1400	1460	60	2	30
3.–4	2	1	1300	1320	20	1	20
3.– 5	7	4	1200	1275	75	3	25
4.–5	4	2	1000	1020	20	2	10
4.–6	4	3	1300	1320	20	1	20
4. –7	8	5	1500	1530	30	3	10
5.–7	5	4	1100	1140	40	1	40
6–7	4	3	1200	1225	25	1	25
∑	19		12500				

من الجدول أعلاه يتضح أن أرخص الأنشطة هي الأنشطة (7-5،4-4)، لكن يجب تحديد طبيعة هذه النشاطات هل هي حرجة أو لا، فنقوم إذن بتحديد المسار الحرج العادي و مدته العادية، ويتيح الحساب إلى الأمام و إلى الخلف تحديد الأنشطة المنتمية إلى المسار الحرج. بعد إجراء الحسابات الضرورية نستخرج المسار الحرج والمسارات غير الحرجة التالية:

ترتيب المسارات المختلفة الموجودة في الشبكة:

المسار	أنشطته	مدته
المسار الأول (الحرج)	7-5-3-2-1	19
	40-25-30-35	
المسار الثاني	7-5-4-3-2-1	18
	40-10-20-30-35	
المسار الثالث	7-6-4-3-2-1	17
	25-20-20-30-35	
المسار الرابع	7-4-3-2-1	17
	10-20-30-35	
المسار الخامس	7-5-4-2-1	17
	40-10-30-35	
المسار السادس	7-6-4-2-1	16
	25-20-30-35	
المسار السابع	7-4-2-1	16
	10-30-35	

المحاولة الأولى:

النشاط المخفض: **3-5** (**1**أسبوع) ينتمي إلى المسار الأول.

المدة الجديدة للمسار بعد التخفيض: **19 - 1 = 18** أسبوع

التكلفة الإجمالية العادية **12500**

ت.ج.الجديدة = **12500 + 25 = 12525و.ن**

بعد هذا التخفيض يصبح هناك مسارين حرجين ب **18** أسبوع.

المحاولة الثانية:

النشاط المخفض: **2-3** (**1** أسبوع) ينتمي إلى المسار الأول والثاني (نشاط مشترك بينهما وتكلفته **30**)، وذلك عوض تخفيض أرخص نشاطين منتميان إلى هذين المسارين(**3-5**) (**4-5**) بمجموع تكلفة تساوي (**25** + **10**= **35**).

المدة الجديدة للمسارين الحرجين: **18 - 1= 17 أسبوع**

بعد هذا التخفيض يصبح هناك ثلاث مسارات حرجة ب **17** أسبوع.

ت.ج.الجديدة = **12525** + **30** = **12555و.ن**

المحاولة الثالثة:

النشاط المخفض: **1-2** (**1**أسبوع) ينتمي إلى كل المسارات (نشاط مشترك بينهم وتكلفته **35**)، وذلك عوض تخفيض أرخص نشاط في كل مسار حرج على حدى (**3-5**)، (**4-5**)، (**4-5**) بمجموع تكلفة تساوي (**25** + **10** + **10** = **35**).

نعطي التفضيل لتخفيض النشاط (**1-2**) عوض الثلاث أنشطة المشار إليهم وذلك لأنه في الحالة الأولى تنخفض كل المسارات مع بعض.

المدة الجديدة للمسارات الحرجة: **17 - 1= 16 أسبوع**

بعد هذا التخفيض يصبح هناك مسارين حرجين بـ **16** أسبوع.

ت.ج.الجديدة للتسريع = **12525** + **35** = **12590و.ن**

المحاولة الرابعة:

النشاطات المخفضة: **3-5** (**1**أسبوع) ينتمي إلى المسار الحرج الأول والنشاط (**4-5**) (**1**أسبوع) المنتمي إلى المسار الحرج الثاني.

المدة الجديدة للمسارات الحرجة: **16 - 1= 15 أسبوع**

بعد هذا التخفيض يصبح هناك أربع مسارات حرجة بـ **15** أسبوع.

ت.ج.الجديدة للتسريع = **12590** + **25** + **10**= **12625و.ن**

المحاولة الخامسة:

النشاطات المخفضة: **3-5** (**1**أسبوع) ينتمي إلى المسار الحرج الأول، النشاط (**4-5**) (**1**أسبوع) المنتمي إلى المسار الحرج الثاني، النشاط (**4-7**) (**1**أسبوع) المنتمي إلى المسار الحرج الثالث والنشاط (**4-6**) المنتمي إلى المسار الحرج الرابع.

المدة الجديدة للمسارات الحرجة: **15** - **1**= **14 أسبوع.**

بعد هذا التخفيض يصبح هناك ثلاث مسارات حرجة ب **45** أسبوع.

ت.ج.الجديدة للتسريع = **12625** + **25**+ **10** + **10** + **20** = **12690و.ن**

المحاولة الخامسة:

النشاطات المخفضة: **5-7** (**1**أسبوع) ينتمي إلى المسار الحرج الأول، النشاط (**4-7**) (**1**أسبوع) المنتمي إلى المسار الحرج الثاني، النشاط (**6-7**) (**1**أسبوع) المنتمي إلى المسار الحرج الثالث.

المدة الجديدة للمسارات الحرجة: **14** - **1**= **13 أسبوع.**

بعد هذا التخفيض يصبح هناك مسار حرج (المسار الأول) من بين المسارات الحرجة المتوصل إليها قد وصل إلى أقصى حدود التسريع المتاحة للنشاطات المنتمية إليه، ولا يصبح بالإمكان تخفيض مدته أكثر من ذلك. المدة الدنيا لتنفيذ المشروع هي **13** أسبوع بتكلفة قصوى مقدارها (**12690** + **40** + **10** + **25** = **12765**و.ن).

تمارين

تمرين1:

لتكن المعطيات التالية المتعلقة بتنفيذ مشروع ما، المطلوب تكوين شبكة تنفيذ هذا المشروع وتقدير التكلفة الإضافية الناتجة عن تسريع تنفيذ نشاطاته إلى أقصى حد ممكن.

النشاط j,z	النشاط السابق له مباشرة	العادية		السريعة	
		المدة (أسبوع)	التكلفة (مليون دينار)	المدة (أسبوع)	التكلفة (مليون دينار)
(A)	--	2	100	1	150
(B)	--	3	200	2	220
(C)	A	4	300	2	330
(D)	A	6	500	3	530
(E)	B	2	180	1	220
(F)	C	8	1000	5	1075
(G)	D	4	700	2	720
(H)	E	5	400	2	520
(I)	F,G	3	150	1	186

تمرين2:

بالاعتماد على معطيات الجدول التالي، أجب على نفس الأسئلة كما في التمرين1.

النشــاطj,z	النشــاط السابق له مباشرة	العاديــــة		السريعــــة	
		المدة (أسبوع)	التكلفة (مليون دينار)	المدة (أسبوع)	التكلفة (مليون دينار)
(A)	--	6	15	2	35
(B)	A	5	10	3	22
(C)	A	2	6	1	15
(D)	B	4	10	2	26
(E)	B,C	3	14	2	30
(F)	D,E	8	20	5	50

تمرين3:

أجب على نفس الأسئلة كما في السؤال السابق مستعملا المعطيات الواردة في الجدول التالي:

النشــاطj,z	النشــاط السابق له مباشرة	العاديــــة		السريعــــة	
		المدة (أسبوع)	التكلفة (مليون دينار)	المدة (أسبوع)	التكلفة (مليون دينار)
(A)	--	2	30	2	--
(B)	--	6	80	5	85
(C)	--	4	100	2	120
(D)	--	4	150	2	250
(E)	A	3	120	1	200
(F)	A	5	80	1	120
(G)	E	2	35	1	50
(H)	G,D	7	60	6	85
(I)	B,E	6	75	5	78
(J)	C,F	4	120	2	230

(K)	C,F	3	60	3	--
(L)	J, I	2	90	2	--
(M)	H,K	3	60	2	90
(N)	M,L	4	160	3	195

تمرين4:

أجب على نفس الأسئلة كما في السؤال السابق مستعملا المعطيات الواردة في الجدول التالي:

النشـاط j,z	النشـاط السابق له مباشرة	العاديـــة		السريعـــة	
		المدة (أسبوع)	التكلفة (مليون دينار)	المدة (أسبوع)	التكلفة (مليون دينار)
(A)	--	6	600	4	640
(B)	--	5	750	3	800
(C)	B	2	830	1	860
(D)	C	2	460	1	500
(E)	A,D	2	500	2	500
(F)	D	1	540	1	540
(G)	A,D	6	380	3	410
(H)	E	5	440	2	500
(I)	H,G	6	650	4	700
(J)	I	2	700	1	770
(K)	G	4	800	3	815
(L)	J, K	3	400	1	490
(M)	L	1	660	1	660

الفرع الرابع: اعتبار الاحتمالات في طريقة PERT

إلى حد الآن لم نأخذ بعين الاعتبار عنصر الاحتمال المتعلق بمدة تنفيذ النشاطات، فاعتبرنا أن هذه المدة معروفة ومتحكم فيها بدقة. لكن هناك كثير من الحالات، التي تكون فيها المدة الزمنية المتوقعة لتنفيذ النشاطات غير محددة وغير معروفة بدقة.

فإذا نظرنا إلى الوقت الفعلي لتنفيذ نشاط ما كمقدار أو كقيمة عشوائية، فإننا نسميه بالنشاط الاحتمالي، وهو يتميز نسبيا بدرجة كبيرة من تشتت المدد الزمنية الخاصة بالتنفيذ.

هناك كثير من العوامل التي تجعل مدة تنفيذ نشاط ما غير متأكد منها تماما ومنها:

- العوامل والظروف المناخية وتأثيرها على وتيرة تنفيذ المشاريع، وخاصة تلك التي تنجز في الظروف المفتوحة على العوامل الجوية مثل عمليات البناء الخارجي التي تنجز في المناطق ذات الظروف المناخية القاسية، سواء في الشتاء أو في الصيف.
- تأثير الكوارث الطبيعية.
- المحيط الاقتصادي لمؤسسات الإنجاز والعوامل المؤثرة فيه (الموردين ،البنوك،...إلخ) قد تلعب أحيانا دورا سلبيا وتؤثر بدورها على مؤسسة الإنجاز وبالتالي مدة الإنجاز.

- إذا كان المشروع المطلوب إنجازه ذو طابع جديد على المؤسسة المكلفة بالإنجاز، بمعنى ليس لها خبرة في تنفيذ مثل هذا النوع من المشاريع، فهذا أيضا يزيد في عامل عدم التأكد في تحديد مدد التنفيذ.

من أجل التمكن من استعمال طريقة **PERT** في تسير وتقييم تنفيذ المشاريع التي تكون مدة تنفيذها غير محددة بدقة، اقترحت هذه الطريقة ثلاث تقديرات لأزمنة تنفيذ هذه النشاطات.

الزمن المتشائم (b_{ij}): وهو المدة الضرورية لتنفيذ النشاط عندما تكون عملية الإنجاز تسير في ظروف غير ملائمة، أي أن وتيرة الانجاز تكون بطيئة جدا لأن ظروف التنفيذ سيئة، وعادة ما يساوي أطول مدة احتمالية لتنفيذ النشاط.

الزمن المتفائل (a_{ij}): هو المدة المطلوبة لتنفيذ النشاط عندما تسير ظروف الإنجاز بطريقة جيدة وملائمة، وهو يعادل أقصر مدة لتنفيذ النشاط.

الزمن الأكثر توقعا (الأكثر احتمالا m_{ij}): هذه المدة تقدر على افتراض أن ظروف الإنجاز سوف تسير حسب الظروف التي تعودت عليها مؤسسة الإنجاز، أي بافتراض أن الموردين سوف يحترمون مواعيد التسليم المتفق عليها بدون تأخير كبير، المواد المسلمة من طرفهم تكون حسب النوعية المتفق عليها مسبقا والتي يتطلبها تنفيذ المشروع، يفترض أيضا أن الصعوبات والمشاكل الجديدة التي تظهر أثناء الإنجاز لا تتطلب إجراءات معالجة خاصة ووقتا طويلا لحلها.

هذه التقديرات الزمنية نحصل عليها اعتمادا على خبرة وتجربة رؤساء الورشات، رؤساء المخابر، مكاتب الدراسات، ...إلخ وذلك بحكم إشرافهم المباشر على الإنجاز.

لكن من أجل حساب مدة تنفيذ المشروع ككل نحتاج إلى مدة واحدة فقط لكل نشاط، فنستعمل إذن هذه الأزمنة التقديرية السابقة ونحسب المدة المتوسطة (d_{ij}) لتنفيذ كل نشاط، أي نحسب الوسط الحسابي لهاته الأزمنة. الوسط الحسابي لمجموعة من القيم أو البيانات ($X_n,...,X_2,X_1$) الخاصة بظاهرة معينة يساوي مجموع هذه القيم مقسوما على عددها (**n**)، ولكن هنا من أجل الحصول على مدة إنجاز أكثر واقعية يجب أن نلاحظ أن المدد الاحتمالية السابقة (**m,b,a**) ليست لها نفس الأهمية (الوزن) بالنسبة لتنفيذ النشاط.

الأزمنة (**a**) أو (**b**) هي إما متفائلة أو متشائمة واحتمال حدوثها أقل بكثير من احتمال حدوث (**m**)، الذي هو الزمن الأكثر احتمالا أو توقعا. من هنا ومن أجل أن نعكس هذه الأهمية النسبية لكل منهم يجب أن نضع أوزانا معينة أو ترجيحات تعكس الوزن النسبي لكل منهم، ثم بعد ذلك نجري حساب الوسط. هذا الوسط الذي سوف نجري حسابه يسمى في هذه الحالة بالوسط الحسابي المرجح .(**la moyenne pondérée**)

إذن بالاعتماد على المعطيات العامة الخاصة بانجاز المشروع وخصائص ظروف تنفيذه يحدد لكل نشاط ثلاث مدد زمنية احتمالية للانجاز(**m,b,a**)، وثلاث احتمالات (P_b,P_m,P_a) وهي تمثل احتمالات حدوث المدد الزمنية (**m,b,a**).

لقد أثبتت تجارب الانجاز لكثير من المشاريع أن مدة الانجاز الأكثر توقعا أو الأكثر احتمالا (**المدة m**) تقع في المجال($d_e -1\sigma \leq m \leq d_e +1\sigma$) للتوزيع الطبيعي المعتدل للقيم العشوائية. نحن نعرف أن احتمال أن تكون (**m**) موجودة في المجال السابق من التوزيع الطبيعي يساوي $\frac{2}{3}$ (أي **0,67** تقريبا) من الكثافة الاحتمالية

لمنحنى هذا التوزيع، أما قيم $(\mathbf{b,a})$ فتقعان في المجالين الأكبر من $(\mathbf{d_e +1\sigma})$ والأقل من $(\mathbf{d_e -1\sigma})$ باحتمال كلي بينهما يساوي $\frac{1}{3}$، (أي ما تبقى من الكثافة الاحتمالية لمنحنى التوزيع الطبيعي التي تساوي 1). إن $(\mathbf{b,a})$ هما قيمتان احتمال حدوثهما متساوي على أساس أن كليهما قيمة متطرفة، يفترض حدوثهما في ظروف متشابهة ولكن متناقضة، لذلك فإن:

$\mathbf{P_b = P_a} = (\frac{1}{3} \div 2) = \frac{1}{6}$. أما احتمال حدوث $(\mathbf{m})$، كما أشرنا سابقا، فيساوي $\mathbf{P_m} = \frac{2}{3}$.

حساب المدة المتوسطة لانجاز أي نشاط حسب الصيغة المشار إليها أعلاه تكون كالتالي:

$$\mathbf{d_e} = \frac{1}{6} . \mathbf{a} + \frac{2}{3} . \mathbf{m} + \frac{1}{6} . \mathbf{b}$$

أي أن: $$\mathbf{d_e} = \frac{\mathbf{a + 4m + b}}{\mathbf{6}}$$

المدة المتوسطة لانجاز المشروع ككل تساوي مجموع المدد المتوسطة للنشاطات التي تكون المسار الحرج.

الوقت المتشائم $(\mathbf{b})$ يمثل أطول مدة زمنية يمكن أن يستغرقها تنفيذ نشاط ما، فهو إذن يمثل أقصى انحراف على اليمين لمدة تنفيذ النشاط عن المدة المتوسطة ، أي: $(\mathbf{d_e +3\sigma})$، بمعنى احتمال أن تزيد مدة التنفيذ عن زمن أكبر من $(\mathbf{b})$ يساوي الصفر.

الوقت المتفائل ($\mathbf{a}$) يمثل أقصر مدة زمنية لتنفيذ نشاط ما، فهو إذن يشكل أدنى مدة زمنية يمكن أن ينحرف بها تنفيذ نشاط ما عن المدة المتوسطة،

أي : $(d_e - 3\sigma)$، احتمال أن تقل مدة تنفيذ النشاط عن (a) يساوي صفر، لذلك فإن احتمال أن تكون مدة تنفيذ النشاط محصورة بين **a** و **b** يساوي **1** (100%)، لكن واعتمادا على خصائص منحنى التوزيع الطبيعي نجد أن مجال انحراف قيمة أي متغير عن وسطه الحسابي باحتمال ثقة يقترب من **1** يساوي $(d_e \pm 3\sigma)$، بمعنى آخر قيمة المتغير تكون محصورة في المجال: $[\ \bar{X} - 3\sigma\ ,\ \bar{X} + 3\sigma\ ]$ باحتمال ثقة يقترب من 1 (0,997). إذن المجال المحصور بين **a** و **b** يعادل طول المجال $(d_e \pm 3\sigma)$، وهذا يفترض أن: $a = d_e - 3\sigma$ على أقصى تقدير و $b = d_e + 3\sigma$ على أقصى تقدير أيضا، والمجال المحصور بينهما هو:

$$b - a = d_e + 3\sigma - (d_e - 3\sigma)$$

$$b - a = 3\sigma + 3\sigma = 6\sigma$$

ومنه الانحراف المعياري لمدة تنفيذ النشاط يساوي: $\sigma = (b - a) / 6$

ثم التباين لمدة تنفيذ النشاط: $\sigma^2 = \left(\frac{(b-a)}{6}\right)^2$، الذي يوضح مقدار تشتت أو تباعد (b,a) عن بعضهما. نستعمل المدة المتوسطة (d_e) لتنفيذ كل نشاط من أجل استخراج المسار الحرج وحساب مدته ومعرفة النشاطات التي يتكون منها، مجموع قيم (d_e) للنشاطات الحرجة يساوي المدة المتوسطة لتنفيذ المسار الحرج والتي يرمز لها ب (T)، أي أن: $T = \sum d_{e(cc)}$ كذلك فإن تباين مدة تنفيذ المشروع ككل تساوي مجموع تباين مدد أنشطته الحرجة.

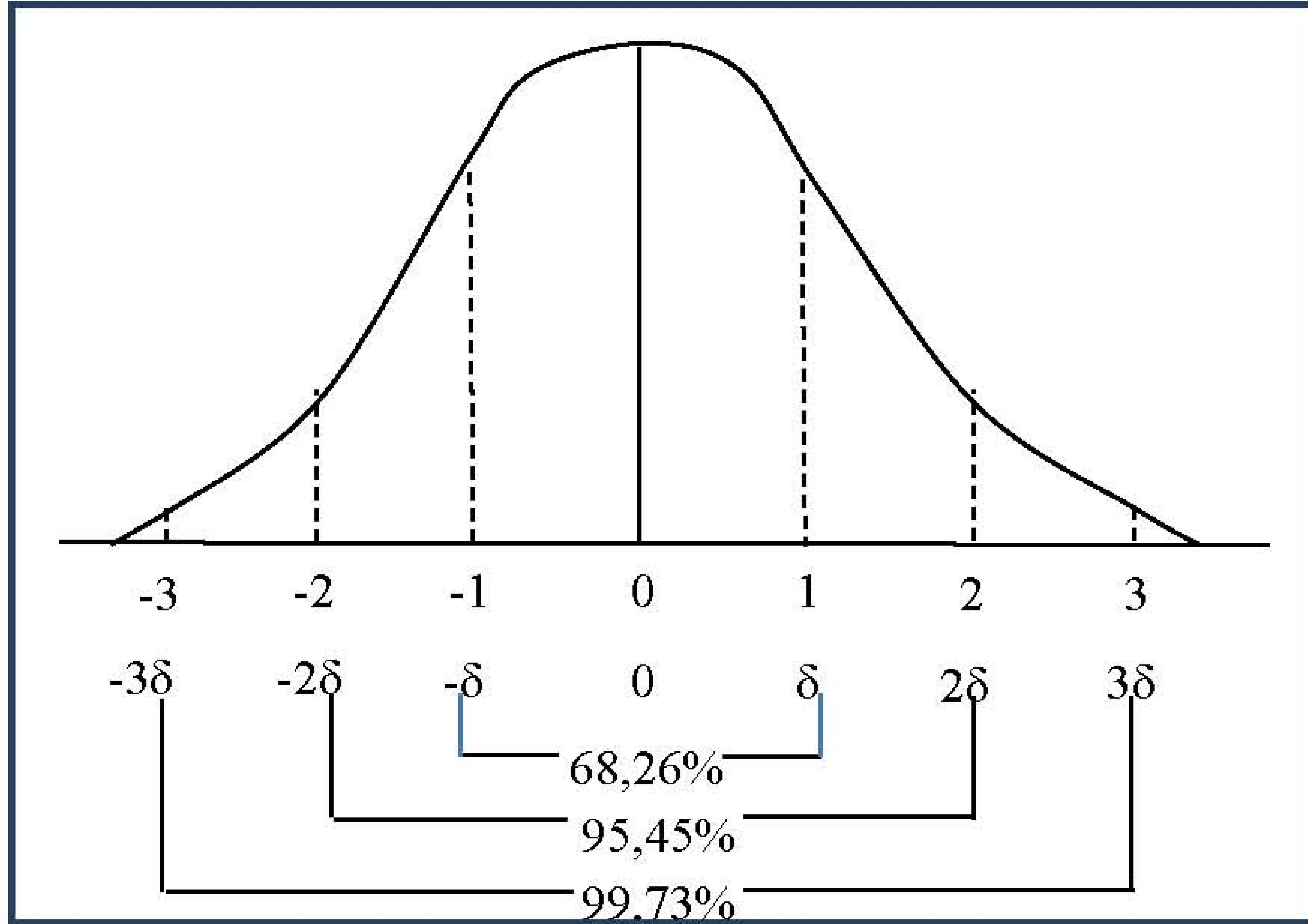
نستخدم التباين (σ^2) والانحراف المعياري (σ) والمدة المتوسطة لانجاز المشروع (T) من أجل معرفة احتمال إنجاز المشروع في مدة زمنية معينة مبتغاة (X) تختلف عن المدة المتوسطة (T).

من أجل إمكانية تقدير ذلك نحول المتغير المعتدل العشوائي (**X**) الذي متوسطه الحسابي ($\bar{X}$) وانحرافه المعياري (σ) إلى متغير معتدل معياري (**z**) متوسطه الحسابي $\bar{z}$ يساوي **صفر** وانحرافه المعياري σ_z .

هذا التحويل يتم وفق الصيغة التالية: $Z = \frac{X-T}{\sigma}$، هذا المتغير المعتدل المعياري (**z**) يقيس الانحرافات عن المدة المتوسطة (**T**) بوحدات من الانحراف المعياري أو بوحدات معيارية.

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (**X**) والمتغير المعياري (**z**) لا يختلفان في الشكل، لكن يختلفان فقط في قيمة المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لكليهما، فعندما نعبر عن المتغير العشوائي (**X**) بدلالة الوحدات المعيارية (**z**)، فإن دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي (**X**) وهي **P(x)** تستبدل بدالة كثافة احتمال المتغير المعياري (**z**) وهي **P(z)**، الشكل التالي يوضح دالة كثافة المتغير المعياري (**z**).

الشكل رقم (5): دالة كثافة المتغير المعياري (z)



المساحة الواقعة في المجال ($-\sigma < z < +\sigma$) **أي** ($-1 < z < +1$) هي باحتمال **68,26%** تقريبا، بينما المساحة الاحتمالية للمجال ($-2\sigma < z < +2\sigma$) فهي **95,45%**، أما المساحة الاحتمالية للمجال ($-3\sigma < z < +3\sigma$) فهي **99,73%** تقريبا، ومنه تكون دالة كثافة احتمال أي متغير معتدل عشوائي (**X**) تخضع لنفس الخاصية:

تقع القيمة (**X**) في المجال ($-\sigma < X < +\sigma$) باحتمال **68,26%** .

وتقع في المجال ($-2\sigma < X < +2\sigma$) باحتمال **95,45%** .

أما إذا وقعت في المجال ($-3\sigma < z < +3\sigma$) فيكون احتمالها **هو 99,73%**.

من أجل تقدير احتمال تنفيذ المشروع في مدة زمنية معينة غير معروفة (**X**)، نأخذ قيمة (**z**) المحصل عليها بواسطة الصيغة $Z = \frac{X-T}{\sigma}$ ونستخرج الاحتمال المقابل لها من جدول التوزيع الإحصائي للمتغير المعتدل المعياري (**z**).

نظرا لأهمية معرفة احتمالات المتغيرات المعتدلة وكثرة الحاجة إليها فقد حسبت قيم المساحات أسفل المنحنى المعتدل، هذا الجدول يعطي المساحات تحت المنحنى المعتدل المعياري المقابلة للمجال بين الصفر (الوسط الحسابي للمتغير المعياري) وبعض الأعداد الموجبة المتوقعة (a) للمتغير (z)، هذه المساحة تعبر عن احتمال أن تكون (z) محصورة بين (a) والصفر، أي : $\mathbf{P}\ (\mathbf{0} < \mathbf{z} \leq \boldsymbol{a})$ ، ونظرا لتماثل وقوع قيم (**z**) في المجالين (**0, a**) و (**0, –a**) **فإن** $\mathbf{P}(\mathbf{0} < \mathbf{z} \leq a) = \mathbf{P}(-\boldsymbol{a} < \mathbf{z} \leq 0)$ وذلك لتساوي مساحتي المنطقتين المتناظرتين حول الوسط الحسابي $\bar{\mathbf{z}}$.

لقد تعرفنا حتى الآن على المسار الحرج الذي هو أطول مسار في المشروع ، أي المدة المتوسطة الإجمالية للانتهاء من تنفيذ المشروع، ويكون احتمال إنهاء المشروع خلال المدة المتوسطة (T) هي 50%، بمعنى أن المدة المتوسطة لتنفيذ المسار الحرج تمثل المتوسط المرجح لهذا التوزيع للوقت المتوقع لإنهاء المشروع. من هذا المنطلق فإنه من الضروري على القائمين على انجاز المشروع تحديد درجة الاحتمال الذي يرتبط بإنهاء المشروع في مدة معينة تختلف عن مدته المتوسطة (**T**).

مثال1: الجدول التالي يعطينا النشاطات التي يتكون منها مشروع ما، وعلاقات التتابع في التنفيذ بينها وتقديرات الأزمنة الثلاث لتنفيذها.

1– كون شبكة إنجاز هذا المشروع.

2– أحسب المدة المتوسطة ($\mathbf{d_e}$) لتنفيذ نشاطاته وتباينها.

3– حدد المسار الحرج والأزمنة الاحتياطية للنشاطات غير حرجة.

4- ما هو احتمال أن يتم تنفيذ هذا المشروع:

أ- 3 أسابيع بعد وقته العادي.

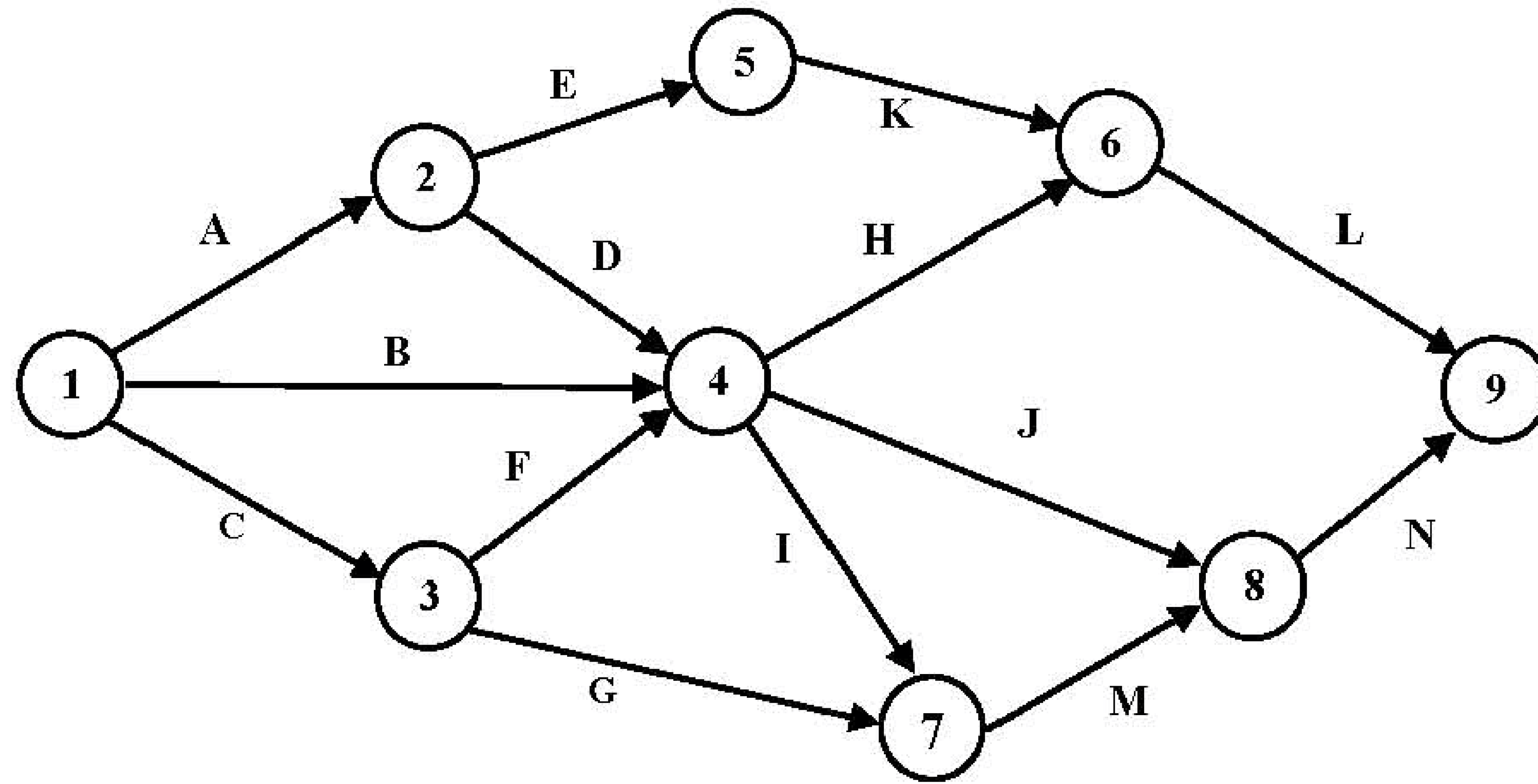
ب- أسبوعين قبل وقته العادي.

ج- ما هي المدة الزمنية التي لها احتمال 95% أن تتحقق.

مدد التنفيذ			النشاط السابق	النشاط
m_{ij}	b_{ij}	a_{ij}	له مباشرة	
2	3	1	–	A
3.5	5	2	–	B
5.5	7	4	–	C
3.5	6	3	A	D
5.5	7	4	A	E
3.5	5	2	C	F
4	6	2	C	G
5.5	8	3	F, D , B	H
6.5	8	4	F , D , B	I
2	4	1	F , D , B	J
1.5	5	0.5	E	K
6	8	5	K , H	L
2.5	3.5	1	I , G	M
3	4	1	J , M	N

الحل:

1- تكوين الشبكة.



2- حساب المدة المتوسطة، التباين والانحراف المعياري للنشاطات:

النشاط	$D_{jz} = (a+b+4m)/6$	$V_{jz} = ((b-a)/6)^2$	$\sigma = \sqrt{V_{jz}}$
A	2	0.11	0.33
B	3.5	0.25	0.5
C	5.5	0.25	0.5
D	3.83	0.25	0.5
E	5.5	0.25	0.5
F	3.5	0.25	0.5
G	4	0.44	0.66
H	5.5	0.7	0.84
I	6.33	0.44	0.66
J	2.17	0.25	0.5
K	1.92	0.56	0.75
L	6.17	0.25	0.5
M	2.41	0.17	0.41
N	2.83	0.25	0.5

3-حساب المسار الحرج:

أولا : الحساب إلى الأمام.

-حساب البدايات المبكرة للحوادث:

$$ES_1 = 0$$

$$ES_2 = \binom{\max}{j=1} \{EC_{12}\} = \max \{ES_{12} + D_{12}\}$$
$$= \max \{0 + 2\} = 2$$

$$ES_3 = \binom{\max}{j=1} \{EC_{13}\} = \max \{ES_{13} + D_{13}\}$$
$$= \max \{0 + 3,5\} = 3,5$$

$$ES_4 = \binom{\max}{j=1,2,3} \{EC_{14}, EC_{24}, EC_{34}\}$$
$$= \max \{ES_{14} + D_{14}, ES_{24} + D24, ES_{34} + D_{34}\}$$
$$= \max \{0+3.5 \ ,2+3.83 \ ,3.5+3.5\} = 7$$

$$ES_5 = \binom{\max}{j=2} \{EC_{25}\} = \{ES_{25} + D_{25}\} = \{2+5.5\} = 7.5$$

$$ES_6 = \binom{\max}{j=4,5} \{EC_{46} \ ,EC_{56}\}$$
$$= \max \{ES_{46} + D_{46} \ ,ES_{56} + D_{56}\}$$
$$= \max \{7.5 + 1.92 \ ,7 + 5.5\} = 12.5$$

$$ES_7 = \binom{\max}{j=3,4} \{EC_{37} \ ,EC_{47}\}$$
$$= \max \{ES_{37} + D_{37} \ ,ES_{47} + D_{47}\}$$
$$= \max \{7 + 6.33 \ , \ 3.5 + 4\} = 13.33$$

$$ES_8 = \binom{\max}{j=4,7} \{EC_{48} \ ,EC_{78}\}$$
$$= \max \{ES_{48} + D_{48} \ ,ES_{78} + D_{78}\}$$
$$= \max \{7 + 2.17 \ ,2.41 + 13.33\} = 15.74$$

$$ES_9 = \binom{\max}{j=6,8} \{EC_{69} \ ,EC_{89}\}$$
$$= \max \{ES_{69} + D_{69} \ ,ES_{89} + D_{89}\}$$
$$= \max \{11 + 6.17 \ ,15.74 + 2.83\} = 18.67$$

–حساب البدايات والنهايات المبكرة للنشاطات.

$_{(A)} = ES_1 = 0 \quad ES_{(F)} = ES_3 = 3.5 \quad ES_{(K)} = ES_5 = 7.5$

$ES_{(C)} = ES_1 = 0 \quad ES_{(G)} = ES_3 = 3.5 \quad ES_{(L)} = ES_6 = 12.5$

$ES_{(B)} = ES_1 = 0 \quad ES_{(H)} = ES_4 = 7 \quad ES_{(M)} = ES_7 = 13.33$

$ES_{(E)} = ES_2 = 2 \quad ES_{(I)} = ES_4 = 7 \quad ES_{(N)} = ES_8 = 15.84$

$ES_{(D)} = ES_2 = 2 \quad ES_{(J)} = ES_4 = 7$

$EC_{(A)} = ES_{(1-2)} + D_{(A)} = ES_1 + D_{(A)} = 0 + 2 = 2$

$EC_{(C)} = ES_{(C)} + D_{(C)} = ES_1 + D_{(C)} = 0 + 3.5 = 3.5$

$EC_{(B)} = ES_{(B)} + D_{(B)} = ES_1 + D_{(B)} = 0 + 5.5 = 5.5$

$EC_{(E)} = ES_{(E)} + D_{(E)} = ES_2 + D_{(E)} = 2 + 5.5 = 7.5$

$EC_{(D)} = ES_{(D)} + D_{(D)} = ES_2 + D_{(D)} = 2 + 3.83 = 5.83$

$EC_{(F)} = ES_{(F)} + D_{(F)} = ES_3 + D_{(F)} = 3.5 + 3.5 = 7$

$EC_{(G)} = ES_{(G)} + D_{(G)} = ES_3 + D_{(G)} = 3.5 + 4 = 7.5$

$EC_{(H)} = ES_{(H)} + D_{(H)} = ES_4 + D_{(H)} = 7 + 5.5 = 12.5$

$EC_{(J)} = ES_{(J)} + D_{(J)} = ES_4 + D_{(J)} = 7 + 2.17 = 9.17$

$EC_{(I)} = ES_{(I)} + D_{(I)} = ES_4 + D_{(I)} = 7 + 6.33 = 13.33$

$EC_{(K)} = ES_{(K)} + D_{(K)}$

$= ES_5 + D_{(K)} = 7.5 + 1.92 = 9.42$

$EC_{(L)} = ES_{(L)} + D_{(L)}$

$= ES_6 + D_{(L)} = 12.5 + 6.17 = 18.67$

$EC_{(M)} = ES_{(M)} + D_{(M)}$

$= ES_7 + D_{(M)} = 13.33 + 2.41 = 15.84$

$EC_{(N)} = ES_{(N)} + D_{(N)}$

$= ES_8 + D_{(N)} = 15.84 + 2.83 = 18.67$

ثانيا : الحساب إلى الخلف:

–حساب البدايات المتأخرة للحوادث.

$LS_9 = ES_9 = 18.67$

$LS_8 = \left(\begin{smallmatrix}\min \\ j=9\end{smallmatrix}\right) \{LS_{89}\} = \min \{LC_{89} - D_{89}\} = \{LS_9 - D_{89}\}$

$= 18.67 - 2.83 = 15.84$

$LS_7 = \left(\begin{smallmatrix}\min \\ j=8\end{smallmatrix}\right) \{LS_{78}\} = \min \{LC_{78} - D_{78}\} = \{LS_8 - D_{78}\}$

$= 15.84 - 2.41 = 13.43$

$LS_6 = \binom{\min}{j=9} \{LS_{69}\} = \min \{LC_{69} - D_{69}\} = LS_9 - D_{69}\}$

$= 18.67 - 6.17 = 12.5$

$LS_5 = \binom{\min}{j=6} \{LS_{56}\} = \min \{LC_{56} - D_{56}\} = LS_6 - D_{56}\}$

$= 12 - 1.92 = 10.58$

$LS_4 = \binom{\min}{j=6,7,8} \{LS_{46}, LS_{47}, LS_{48}\}$

$= \min \{LC_{46} - D_{46}, LC_{47} - D_{47}, LC_{48} - D_{48}\}$

$= \min \{12.5 - 5.5, 13.43 - 6.33, 15.84 - 2.17\} = 7$

$LS_3 = \binom{\min}{j=4,7} \{LS_{34}, LS_{37}\} = \min \{LC_{34} - D_{34}, LC_{37} - D_{37}\}$

$= \{7 - 3.5, 13.43 - 4\} = 3.5$

$LS_2 = \binom{\min}{j=4,5} \{LS_{24}, LS_{25}\} = \min \{LC_{24} - D_{24}, LC_{25} - D_{25}\}$

$= \min \{LS_4 - D_{24}, LS_5 - D_{25}\}$

$= \min \{7 - 3.83, 10.58 - 5.5\} = 3.17$

$LS_1 = \binom{\min}{j=2,3,4} \{LS_{12}, LS_{13}, LS_{14}\}$

$= \min \{LC_{12} - D_{12}, LC_{13} - D_{13} \quad LC_{14} - D_{14}\}$

$= \min \{3.17 - 2, 3.5 - 3.5, 7 - 5.5\} = 0$

-حساب البدايات المتأخرة للنشاطات .

$LS_{89} = LC_{89} - D_{89} = LS_9 - D_{89} = 18.67 - 2.83 = 15.84$

$LS_{69} = LC_{69} - D_{69} = LS_9 - D_{69} = 18.67 - 6.17 = 12.5$

$LS_{78} = LC_{78} - D_{78} = LS_8 - D_{78} = 15.84 - 2.41 = 13.43$

$LS_{48} = LC_{48} - D_{48} = LS_8 - D_{48} = 15.84 - 2.17 = 13.67$

$LS_{47} = LC_{47} - D_{47} = LS_7 - D_{47} = 13.43 - 6.33 = 7.1$

$LS3_7 = LC_{37} - D_{37} = LS_7 - D_{37} = 13.43 - 4 = 9.43$

$LS_{56} = LC_{56} - D_{56} = LS_6 - D_{56} = 12.5 - 1.92 = 10.58$

$LS_{46} = LC_{46} - D_{46} = LS_6 - D_{46} = 12.5 - 5.5 = 7$

$LS_{25} = LC_{25} - D_{25} = LS_5 - D_{25} = 10.58 - 5.5 = 5.08$

$LS_{34} = LC_{34} - D_{34} = LS_4 - D_{34} = 7 - 3.5 = 3.5$

$LS_{24} = LC_{24} - D_{24} = LS_4 - D_{24} = 7 - 3.83 = 3.17$

$LS_{14} = LC_{14} - D_{14} = LS_4 - D_{14} = 7 - 5.5 = 1.5$

$LS_{13} = LC_{13} - D_{13} = LS_3 - D_{13} = 3.5 - 3.5 = 0$

$LS_{12} = LC_{12} - D_{12} = LS_2 - D_{12} = 3.17 - 2 = 1.17$

–حساب النهايات المتأخرة للنشاطات.

$LC_{89} = LS_9 = 18.67$ $LC_{47} = LS_7 = 13.43$

$LC_{69} = LS_9 = 18.67$ $LC_{37} = LS_7 = 13.43$

$LC_{78} = LS_8 = 15.84$ $LC5_6 = LS_6 = 12.5$

$LC_{48} = LS_8 = 15.84$ $LC_{25} = LS_5 = 10.58$

$LC_{34} = LS_4 = 7$ $LC_{46} = LS_6 = 12.5$

$LC_{14} = LS_4 = 7$ $LC_{24} = LS_4 = 7$

$LC_{12} = LS_2 = 3.17$ $LC_{13} = LS_3 = 3.5$

4) تكوين الجدول الزمني وتحديد الأوقات الاحتياطية.

النشاط (j,z)	مدة النشاط $D_{(j,z)}$	المبكرة		المتأخرة		TF	FF
		البداية $ES_{(j,z)}$	النهاية $EC_{(j,z)}$	البداية $LS_{(j,z)}$	النهاية $LC_{(j,z)}$		
A	2	0	2	1.17	3.17	1.17	0
C	3.5	0	3.5	0	3.5	0	0
B	5.5	0	5.5	1.5	7	1.5	1.5
E	5.5	2	7.5	5.08	10.58	3.08	0
D	3.83	2	5.83	3.17	7	1.17	1.17
F	3.5	3.5	7	3.5	7	0	0
G	4	3.5	7.5	9.43	13.43	5.93	5.8
H	5.5	7	12.5	7	12.5	0	0
I	6.33	7	13.33	7.1	13.43	0.1	0
J	2.17	7	9.17	13.67	15.84	6.67	6.57
K	1.92	7.5	9.42	10.58	12.5	3.08	3.08
L	6.17	12.5	18.67	12.5	18.67	0	0
M	2.41	13.33	15.84	13.43	15.84	0.03	0.1
N	2.83	15.74	18.57	15.84	18.67	0.1	0.1

إذن الأنشطة المكونة للمسار الحرج هي الأنشطة (**L, H, F, C**)

ومجموع مدة إنجاز المشروع هي مجموع مدة تنفيذ أنشطته الحرجة، أي:

$T = (6.17 + 5.5 + 3.5 + 3.5) = 18.67$ أسبوع.

تباين المسار الحرج (**V=1.45**) وانحرافه المعياري $\sigma = \sqrt{1.45}$.

5- أ: تنفيذ المشروع ثلاث أسابيع بعد وقته المنتظر (العادي) يعني تنفيذه بعد:

18.67 + 3 = 21.67 أسبوعا، فيجب البحث في هذه الحالة عن احتمال انتهاء المشروع في هذه المدة ، أي البحث عن (P (**x** =21.67. عندئذ يجب تحويل (X = 21.67) إلى ما يعادلها من قيمة (Z) بواسطة العلاقة $Z = \frac{X-T}{\sigma}$، فنحصل على ($Z = \frac{X-T}{\sigma} = \frac{21,67-18,67}{1,2} = \frac{3}{1,2}$)

Z = 2,5، ثم نحسب احتمال أن يكون المتغير المعياري Z مساويا لـ (2,5)، أي البحث عن P(z=2,5) .

باللجوء إلى جدول التوزيع الإحصائي للمتغير المعياري (**Z**) نجد أن:

P(X =21.67) = P(z=2,5) = 0,5 + 0,4938 = 0.9938

ويكون احتمال تنفيذ المشروع ثلاث أسابيع بعد وقته المتوسط المنتظر هو **99,38%** (مستخرج من جدول التوزيع الإحصائي للمتغير المعتدل المعياري **z**).

ب–: تنفيذ المشروع أسبوعيين قبل وقته العادي يعني تنفيذه قبل **16.67** أسبوعا، أي:

$$Z = \frac{T-X}{\sigma} = \frac{18,67-16,67}{1,2} = \frac{2}{1,2} = 1,661$$

احتمال تنفيذ المشروع أسبوعيين قبل وقته العادي هو 0,5 – 0,4515 = 0,049 (مستخرج من جدول التوزيع الإحصائي للمتغير المعتدل المعياري **z**).

ج –: المدة الزمنية التي يكون احتمالها هو 0,955 هي:

المدة الزمنية التي يكون احتمالها هو 0.955 نحسبها كالتالي:

احتمال أن تكون مدة التنفيذ محصورة في المجال (**X** ,**T**) تساوي (0,5 – 0,45 0,95)، ويعطينا جدول التوزيع الطبيعي قيمة (**z**) المقابلة لهذا الاحتمال وهي (1,7)، إذن: $1.7 = \frac{X-18,67}{1,2}$

$$X = 1,7 \ . \ 1,2 + 18,67 = 20,71$$

X = 20.71 أسبوعا.

مثال2:

الجدول التالي يتضمن معطيات تنفيذ مشروع معين كالتالي:

النشاط	النشاط السابق له مباشرة	مدد التنفيذ (أسبوع)		
		a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}
A	–	4	5	12
B	–	1	1,5	5
C	A	2	3	4
D	A	3	4	11
E	A	2	3	4
F	C	1,5	2	2,5
G	d	1,5	3	4,5
H	B, E	2,5	3,5	7.5
I	H	1,5	2	2.5
J	F , G , I	1	2	3

المطلوب: حساب ما يلي:

1-مدد التنفيذ المتوسطة للنشاطات

2- المسار الحرج لهذا المسار.

3- المدة المتوسطة (**T**) لانجازه.

4- ما هو احتمال تنفيذ المشروع خلال مدة **X** = **20** أسبوع.

الحل:

1-تحديد مدد التنفيذ المتوسطة للنشاطات وتبايناتها.

J	I	H	G	F	E	d	C	B	A	النشاط
2	2	4	3	2	3	5	3	2	6	المدة المتوسطة لتنفيذ النشاط d_e
0,11	0,03	0,69	0,25	0,03	0,11	1,78	0,11	0,44	1,78	التباين σ^2

2- تحديد المسار الحرج.

النشاط (j,z)	مدة النشاط d_e	المبكرة		المتأخرة		TF
		البداية $ES_{(j,z)}$	النهاية $EC_{(j,z)}$	البداية $LS_{(j,z)}$	النهاية $LC_{(j,z)}$	
A	6	0	6	0	6	0
B	2	0	2	7	9	7
C	3	6	9	10	13	4
d	5	6	11	7	12	1
E	3	6	9	6	9	0
F	2	9	11	13	15	4
G	3	11	14	12	15	1
H	4	9	13	9	13	0
I	2	13	15	13	15	0
J	2	15	17	15	17	0

3- المسار الحرج للمشروع يتكون من النشاطات (A-E-H-I-J)، ومدته تساوي 17 أسبوع (2+2+4+3+6)، وهذا يعني أن المدة المتوسطة المتوقعة لتنفيذ المشروع هي 17 أسبوع.

4- إذا افترضنا أن مدد تنفيذ نشاطات المشروع موزعة توزيعا معتدلا، فإنه بالإمكان تقدير احتمال تنفيذ المشروع خلال 20 يوما. تباين مدة تنفيذ المشروع يساوي مجموع تباينات مدد تنفيذ أنشطته الحرجة: $\sigma^2_{(T)} = 2,72$ وانحرافه المعياري $\sigma_{(T)} = \sqrt{2,72} = 1,65$. يمكن تقدير قيمة المتغير المعياري (z) المناسب لمدة التنفيذ المطلوبة **X**= **20** أسبوعا.

$$Z = \frac{X-T}{\sigma} = \frac{20-17}{1,65} = 1,82$$

باستعمال جدول التوزيع الطبيعي (انظر الملحق) نجد احتمال أن تكون مدة تنفيذ المشروع موجودة في المجال (**X , T**)، وذلك بالنظر إلى تقاطع صف (**1,8**) وعمود (**0,02**) لجدول التوزيع الطبيعي، ونجد قيمته هي **0,4656**.

فإذا كانت المدة المتوقعة المتوسطة لتنفيذ المشروع هي 17 أسبوعا، فإن احتمال تنفيذه خلال 20 أسبوعا يساوي (0,5 + 0,4556 = 0,9656).

تمارين

تمرين1:

ليكن المشروع الممثل بالمعطيات التالية:

مدد التنفيذ (يوم)			النشاط
b_{ij}	m_{ij}	a_{ij}	
6	5	4	A
10	9	8	B
11	7,5	7	C
10	9	7	D
9	7	6	E
7	6	5	F

المطلوب:

1- ما هي المدة المتوسطة (**T**) لانجاز هذا المشروع إذا علمت أن المسار الحرج يتكون من النشاطات (**B–d–F**).

2- احسب قيمة تباين مدة تنفيذ المشروع.

الجواب:

1- $T = 23{,}83$ يوم.

2- $\sigma^2_{(T)} = 0{,}47$

تمرين2:

في ما يلي المعطيات الاحتمالية لتنفيذ مشروع معين.

النشاط	A	B	C	d	E	F	G	H	I
النشاط السابق له مباشرة	–	--	A,B	A,B	B	C	d	D, F	E,G,H
a_{ij}	3	2	5	7	2	1	5	6	1
m_{ij}	5	4	6	9	4	2	8	8	4
b_{ij}	6	6	7	10	6	3	10	10	5

المطلوب: حساب ما يلي.

1-شبكة **PERT/CPM** لتنفيذ المشروع.

2- المدة المتوسطة (**T**) المتوقعة لانجازه.

3 – تباين مدة تنفيذه.

4 – احتمال تنفيذ المشروع خلال **24** أسبوع.

الجواب:

2- $T = 25{,}33$ **أسبوع.**

3- $\sigma^2_{(T)} = 1{,}4$

4- قيمة المتغير المعياري (**z**) في هذه الحالة هي:

$$Z = \frac{X-T}{\sigma} = \frac{25,33 - 24}{1,18} = 1,127$$

باستعمال جدول التوزيع الطبيعي، نجد احتمال أن تكون مدة التنفيذ موجودة في المجال (X,T)، وذلك بأخذ القيمة الموجودة عند تقاطع صف (1,1) وعمود (0,02). هذه القيمة هي: 0,3686.

إذا كانت المدة المتوسطة المتوقعة لتنفيذ المشروع هي 25,33، فإن احتمال تنفيذه خلال 24 أسبوع فقط تساوي: 0,5 - 0,3686 = 0,1314.

تمرين3:

لدينا المعطيات التالية الخاصة بتنفيذ مشروع معين.

النشاط	A	B	C	d	E	F	G	H
النشاط السابق له مباشرة	–	--	A	A	B	D,E	D,E	C, F
a_{ij}	4	2,5	6	5	5	2	8	6
m_{ij}	5	3	7	5,5	7	3	10	87
b_{ij}	6	3,5	8	9	9	4	12	14

المطلوب: حساب ما يلي.

1- المدة المتوسطة (**T**) المتوقعة لانجاز المشروع.

2- احتمال تنفيذ المشروع خلال **21** أسبوع.

3 – احتمال تنفيذ المشروع خلال **25** أسبوع..

الجواب:

1-المدة المتوسطة (**T**) المتوقعة لتنفيذ المشروع تساوي **22 أسبوع.**

2- احتمال التنفيذ خلال **21** أسبوع هو (**0,5 - 0,2389**) = **0,2611**

3- احتمال التنفيذ خلال **25** أسبوع هو (**0,5** + **0,4726**) = **0,9726**

تمرين4:

ليكن المشروع ذو معطيات الانجاز التالية:

النشاط	A	B	C	d	E	F	G	H	I
النشاط السابق له مباشرة	--	A	--	C	B, d	E	B, d	G	F, H
a_{ij}	1,5	2	1	1,5	0,5	1	3	3	1,5
m_{ij}	2	2,5	2	2	1	2	3,5	4	2
b_{ij}	2,5	6	3	2,5	1,5	3	7	5	2,5

المطلوب: تقدير ما يلي.

1- المسار الحرج.

2- المدة المتوسطة (T) المتوقعة لانجاز المشروع وتباينها.

3- مدة التنفيذ المتوقعة باحتمال يساوي 0,975.

الجواب:

1-المسار الحرج هو: A- B- G- H- I

2- المدة المتوسطة (**T**) المتوقعة لتنفيذ المشروع تساوي **15** أسبوع، $\boldsymbol{\sigma^2_{(T)}} = \mathbf{1{,}061}$.

3- مدة التنفيذ المطلوبة (X) يجب أن تتناسب مع احتمال 0,975. احتمال أن تكون مدة التنفيذ موجودة في المجال (T, X) تساوي 0,475 (0,975 – 0,5)، وباستعمال جدول التوزيع الطبيعي نستخرج قيمة (**z**) المقابلة لها وهي (1,96).

من هنا: $X = z . \sigma + T = 1{,}96 . 1{,}03 + 15 = 17{,}02$

مدة التنفيذ المطلوبة هي: **17,02** أسبوع.

المبحث الثاني

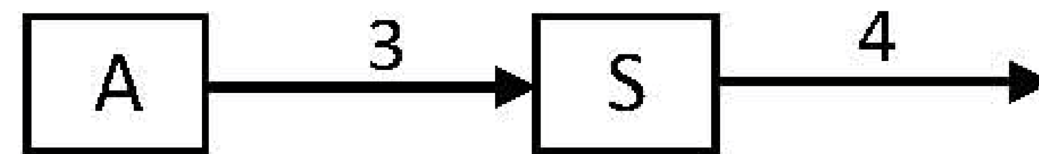
طريقة الإمكانات Méthode des potentiels

في عام **1961** صمم المهندس الفرنسي (Bernard Roy) طريقة أخرى في تقييم ومراقبة تنفيذ المشاريع سميت بطريقة الإمكانات **(M. des potentiels)** واستعملها بمناسبة إنجاز محطة نووية لإنتاج الكهرباء.

كيفية تكوين شبكة تنفيذ المشروع:

من أجل تكوين الشبكة حسب هذه الطريقة يجب أن ننتبه إلى أن الرموز المستعملة في إعداد الشبكة الممثلة لمراحل إنجاز المشروع حسب طريقة **(PERT)** تصبح الآن وحسب هذه الطريقة تحمل معاني ودلالات مختلفة. فالدوائر التي كانت تمثل الحوادث في طريقة **PERT** تصبح غير موجودة، أما النشاط فيمثل بمربع يخرج منه سهم يرمز أو يشير إلى علاقات التتابع المنطقي في التنفيذ بين النشاطات المختلفة داخل الشبكة. فوق كل سهم يسجل عادة المدة الزمنية المتوقعة لتنفيذ النشاط الذي ينطلق منه هذا السهم.

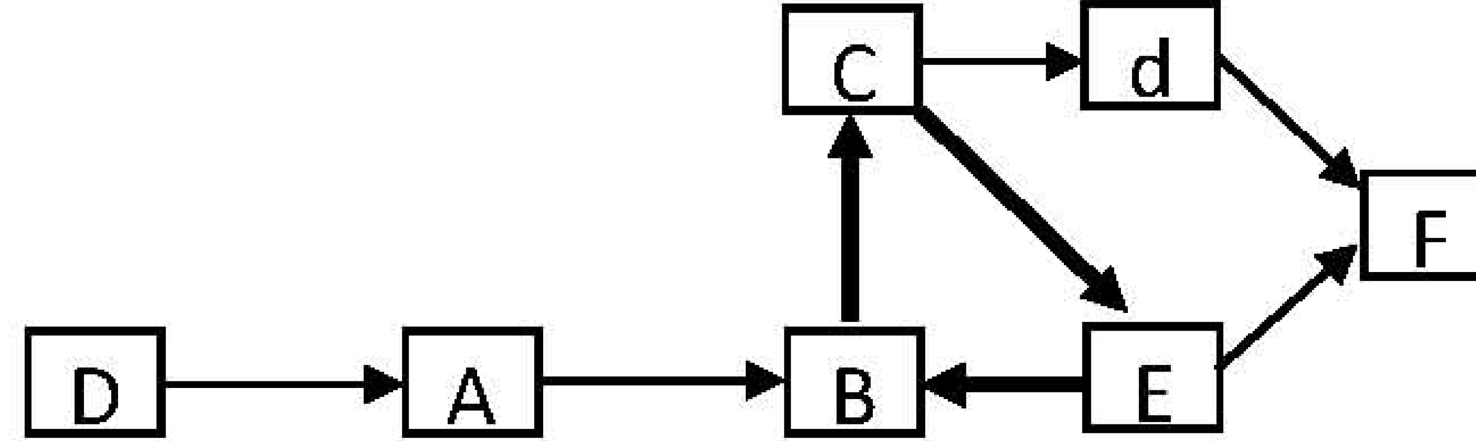
مثال:



المخطط السابق يعني أن النشاط **(S)** والذي مدة إنجازه **(4)** يسبقه في التنفيذ النشاط **(A)** ومدته (3)، وهذه الطريقة لا تحتاج إلى استعمال النشاطات الوهمية.

تتميز شبكة **الإمكانات** بضرورة بدءها بنشاط يسمى بنشاط بداية المشروع **(D)** ونشاط نهاية المشروع **(F)**، وهي أنشطة غير موجودة من ضمن أنشطة المشروع ولكن تستعمل فقط من أجل تكوين الشبكة.

الشبكة المعدة حسب هذه الطريقة – مثلها مثل شبكة **PERT** – لا يجب أن تحتوي على حلقات مغلقة، مثال: نفرض أنه لدينا الشبكة الجزئية التالية:



نلاحظ أن الأنشطة (**B,E,C**) تشكل فيما بينها حلقة مغلقة وهذا يعني تناقص في منطق التتابع بين هذه النشاطات، فالنشاط (C) مثلا لا يمكن أن يبدأ إلا عندما ينتهي (**B**) و(B) لا يبدأ إلا عندما ينتهي (E) ولكن هذا الأخير لا يبدأ حتى ينتهي (C).

ومن السهل إذن ملاحظة أن هذا النشاط (C) يتوقف في تنفيذه على نفسه في هذه الحالة. وأيضا عند تكوين جدول حساب المسار الحرج وفق هذه الطريقة، نلاحظ أن كل الخانات تبقى غير مملوءة وبالتالي فهذا التناقض في منطق التتابع بين الأنشطة لا يسمح لنا بحساب المسار الحرج لهذا المشروع (كما سنرى فيما بعد)

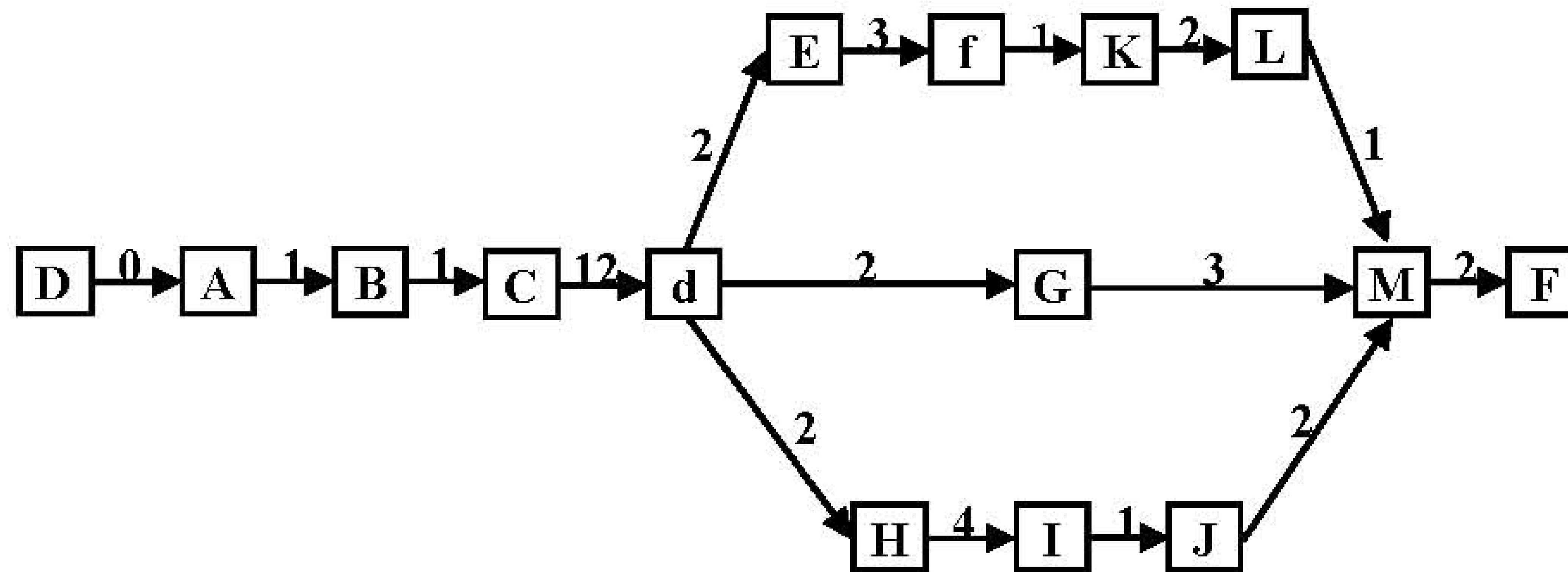
نعطي في ما يلي مقارنة بين بعض أهم الوضعيات التي يتطلبها إعداد وتكوين شبكتي **Pert** و **les potentiels**.

شكل رقم 07: مقارنة لأهم الوضعيات في تكوين شبكة PERT وشبكة Les Potentiels	
A B	A B
A B C D	A B C D
L M K A	L M K A
B A L M K	B A L M K
L A B C	L A B C
A B C D E	A B C D E
يوجد نشاط بداية ونهاية المشروع F D	لا يوجد

مثال1: الجدول التالي يعطي النشاطات التي يتكون منها مشروع معين وعلاقات التتابع في التنفيذ بينها. المطلوب: تكوين شبكة إنجاز هذا المشروع حسب هذه الطريقة.

النشاط	A	B	C	d	G	E	H	f	I	J	K	L	M
مدة إنجازه	**1**	1	12	2	3	1	3	4	1	2	2	1	2
النشاطات السابقة له مباشرة	-	A	B	C	d	d	d	E	h	I	f	K	G,J,L

الحل:

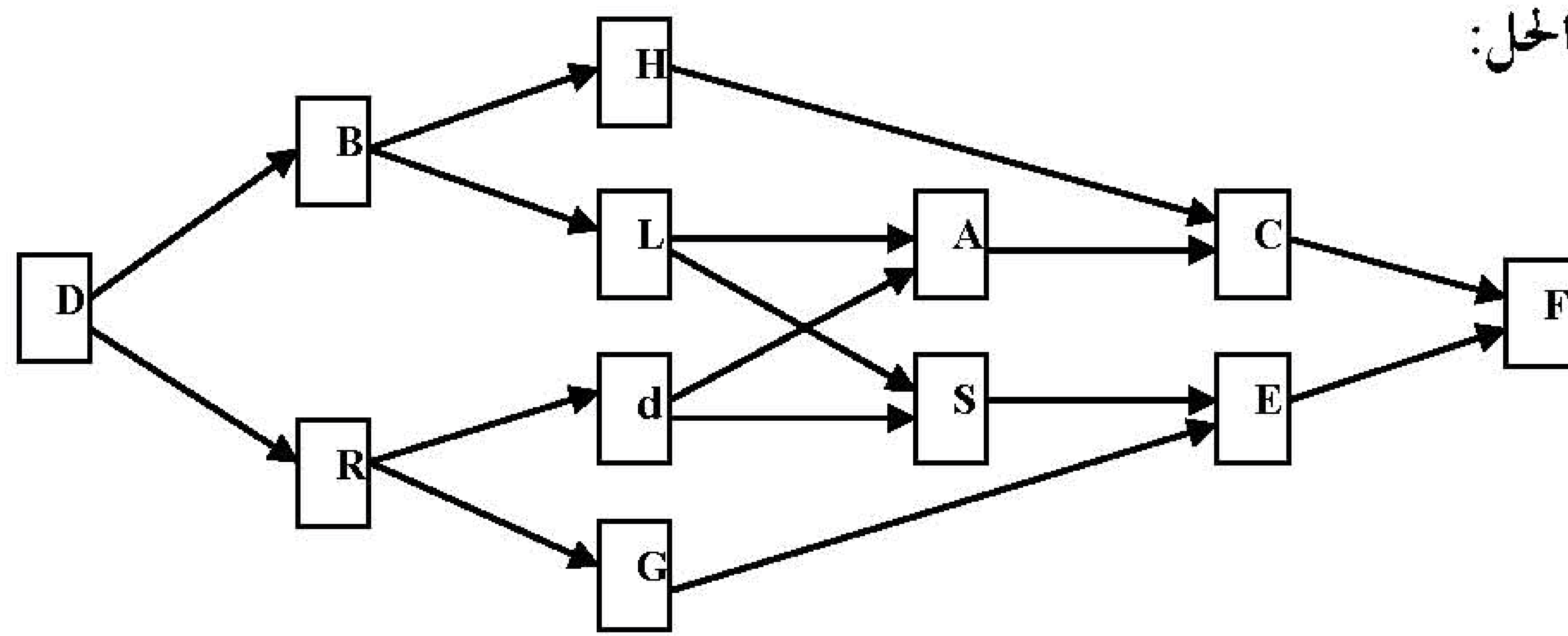


مثال2:

كون شبكة تنفيذ المشروع حسب المعطيات التالية، مستعملا طريقة (les potentiels).

النشاط	B	R	d	G	H	L	S	A	E	C
النشاطات السابقة له مباشرة	-	-	R	R	B	B	d ,L	d ,L	G,S	A,H

الحل:



كيفية إيجاد المسار الحرج:

أولا: الحساب إلى الأمام (تقدير الأوقات المبكرة).

إجراء هذا الحساب يتطلب تكوين جدول، وفيه يخصص عمود لكل نشاط من النشاطات المكونة للمشروع، بحيث يخصص عمود لنشاط نهاية المشروع (F) ولا يخصص عمود لنشاط البداية(D).

– نضع في أعلى العمود اسم النشاط، ثم نقسم هذا العمود إلى خانتين كبيرة وصغيرة (الكبيرة توضع في يسار العمود).

– نكتب في الخانة الكبيرة كل النشاطات التي تسبق في التنفيذ النشاط الموجود في رأس العمود، ونضع أمام هذه النشاطات المدد الزمنية المتوقعة لتنفيذها، إذا كان نشاط ما ليس مسبوقا بنشاط آخر (نشاط بداية المشروع) فنكتب في هذه الحالة في الخانة الكبيرة الخاصة به الحرف (D) (بداية المشروع)، ونضع أمامه مدته الزمنية **صفر**.

– عندما تنتهي هذه المرحلة تبدأ المرحلة الثانية والمتمثلة في البحث عن الأعمدة التي تكون خاناتها الكبيرة الموجودة فيها تحتوي على النشاط (D)، فنضع مقابل هذا النشاط في الخانة الصغيرة العدد **صفر** (هذا طبعا يخص النشاط أو النشاطات التي يبدأ بها المشروع).

– عندئذ خانات كل النشاطات التي تحتوي على (D) تكون قد امتلأت أو (كاملة): بمعنى أن الخانة الكبيرة والصغيرة لهذا النشاط أصبحتا مملوءتين، نجمع الآن الرقمين (**0+0**) الموجودين في الخانتين الكبيرة والصغيرة لهذا النشاط ونستنتج أن الوقت الضروري لبداية هذا النشاط يساوي الصفر. بعدها نكتب هذا العدد (القيمة) في رأس العمود(أمام تسمية النشاط الذي نحن بصدده).

– نتتبّع بعدئذ الخانات الكبيرة الموجودة في أعمدة كل النشاطات الأخرى، فإذا ما كان النشاط السابق الإشارة إليه (والذي وقت بدايته =**0**) موجودا فيها، فنضع أمامه في الخانة الصغرى القيمة (**0**) ويكون بذلك العمود الخاص بذلك النشاط قد امتلأ، **فنجمع** الرقمين الموجودين (في الخانة الكبرى والصغرى) ونضع النتيجة في أعلى العمود، وهكذا حتى نصل إلى العمود المخصص لنشاط نهاية المشروع وهو (**F**). العدد المكتوب في رأس هذا العمود هو المدة الزمنية اللازمة لإنجاز المشروع ككل.

– إذا كانت هناك خانة كبيرة ما تحتوي على عدة نشاطات (وهي طبعا النشاطات السابقة للنشاط الموجود في أعلى العمود) و تكون الخانات الصغيرة المقابلة لهم قد امتلأت، فنجمع كل قيمتين موجودتين على نفس السطر في الخانة الكبيرة والصغيرة، ونضع في رأس العمود **أكبر** القيم الناتجة عن الجمع (**max**).

بهذا الأسلوب نكون قد حصلنا على الأزمنة المبكرة لبداية النشاطات المختلفة.

مثال: احسب الأوقات المبكرة لنشاطات المشروع الممثل بشبكة المثال الأول السابق.

الحل:

أنظر الجدول على الصفحة الموالية:

0 A		B 1		2 C		14 d		16 E		19 f	
D:0	0	a:1	0	B:1	1	C:12	2	d:2	14	E:3	16

16 H		20 I		21 J		20 K		22 L		23 M	
d:2	14	H:4	16	I:1	20	f:1	19	K:2	20	G:3 J:2 L:1	16 21 22

نلاحظ أن العمود الممثل للنشاط (A) هو الوحيد الذي تحتوي خانته الكبيرة على النشاط (D)، فنضع إذن أمامه في الخانة الصغرى القيمة (0) ثم نجمع القيمتين الموجودتين على نفس السطر أي:(**0+0**)=**0**، ونضع نتيجة الجمع في أعلى العمود أمام تسمية النشاط المعني (**A**)، ويكون ذلك معناه أن الوقت المبكر للنشاط (**A**) يساوي صفر.

بعد ذلك نبحث عن الأعمدة التي توجد في خانتها الكبرى النشاط (**A**) ونضع أمامه في الخانة الصغرى القيمة (0). نلاحظ أن العمود الوحيد الذي يحتوي خانته الكبيرة على النشاط (**A**) هو عمود النشاط (B)، فنجمع القيم الموجودة على نفس السطر في الخانة الكبيرة والصغيرة، أي: **0+1=1** ونكتب هذه القيمة أمام (B) في رأس العمود، وهذا يعني أن النشاط (**B**) سينطلق تنفيذه المبكر بعد أسبوع، وهكذا إلى غاية نهاية الجدول.

ثانيا: الحساب إلى الخلف (تحديد الأوقات المتأخرة).

– يبدأ الحساب إلى الخلف من آخر نشاط في الشبكة.

– نكون جدول آخر، وفيه يخصص عمود لكل نشاط من النشاطات المكونة للمشروع، وهنا يخصص عمود لنشاط بداية المشروع (**D**) ولا يخصص عمود لنشاط النهاية (F).

– نضع في أعلى العمود اسم النشاط، ثم نقسم هذا العمود إلى خانتين كبيرة وصغيرة (الصغيرة توضع في يسار العمود وذلك على عكس الحساب إلى الأمام) على أساس أن الخانة الكبيرة سوف تحتوي في هذه الحالة على النشاطات اللاحقة للنشاط الموجود في رأس العمود.

– نكتب في الخانة الكبيرة كل النشاطات التي تأتي بعد النشاط الموجود في رأس العمود (النشاطات اللاحقة له)، ونضع أمام هذه النشاطات **المدة الزمنية الموجودة في رأس العمود**، بالنسبة للنشاط الأخير، نكتب في هذه الحالة في الخانة الكبيرة الخاصة به النشاط (F) (نشاط نهاية المشروع).

– يبدأ الحساب من الخلف بوضع المدة الزمنية المبكرة للنشاط الأخير، التي تم الحصول عليها في الحساب إلى الأمام، نضعها في الخانة الصغيرة المقابلة ل F (النشاط الأخير F يجب أن يكون الوقت المبكر والمتأخر لبدايته متساويان).

– **نطرح** الرقمين من بعضهما ونضع النتيجة في أعلى العمود على يمين اسم النشاط المعني.

– إذا كان هناك نشاط معين يليه في التنفيذ نشاط أو أكثر، فنجمع كل قيمتين متقابلتين موجودتين في الخانتين الصغيرة والكبيرة، ثم نأخذ **أصغرهما** ونضعها في رأس العمود.

– القيم المحصل عليها بهذا الأسلوب تسمى بالأوقات المتأخرة للتنفيذ.

نرجع الآن إلى المثال السابق ونحسب البدايات المتأخرة للنشاطات كالتالي:

D	0	0	A	B	1	C	2	d	14	E	16
0	A:0	1	B:1	2	C:1	14	d:12	16	E:2	19	f:3
								20	G:2		
								16	H:2		

G	20	H	16	I	20	J	21	K	20	L	2
23	M:3	20	I:4	21	J:1	23	M:2	22	L:2	23	M:1

ثانيا: تحديد المسار الحرج.

النشاطات التي قيم بداياتها المبكرة والمتأخرة **متساوية** هي التي تشكل المسار الحرج، أما الأخرى فهي نشاطات غير حرجة ولها أوقات احتياطية متاحة.

النشاط	A	B	C	d	E	f	G	H	I	J	K	L	M
البداية المبكرة	0	1	2	14	16	19	16	16	20	21	20	22	23
البداية المتأخرة	0	1	2	14	16	19	20	16	20	21	20	22	23
الوقت الاحتياطي	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0

نلاحظ أن كل النشاطات هي حرجة ما عدا النشاط **G**، هذه النشاطات تشكل مسارين حرجين متساويين هما: **A–B–C–d–E–f–K–L–M–F** وأيضا **A–B–C–d–H–I–J–M–F**بمدة زمنية تساوي 25 أسبوعا.

من أهم مزايا هذه الطريقة في تكوين الشبكة بالمقارنة بطريقة (**PERT**) هي بساطتها النسبية المتمثلة خاصة في عدم حاجتها إلى النشاطات الوهمية وهذا ما يسهل ويختصر كثيرا من التعقيدات والصعوبات المتعلقة بتكوين الشبكة ومجالات استعمالها واستغلالها.

لكن هذه البساطة تقابلها انحصار مجال المعلومات المتحصل عليها في ما يتعلق بطبيعة النشاطات، المسار الحرج وكذلك الأزمنة المختلفة مقارنة بما تتيحه طريقة(**PERT**).

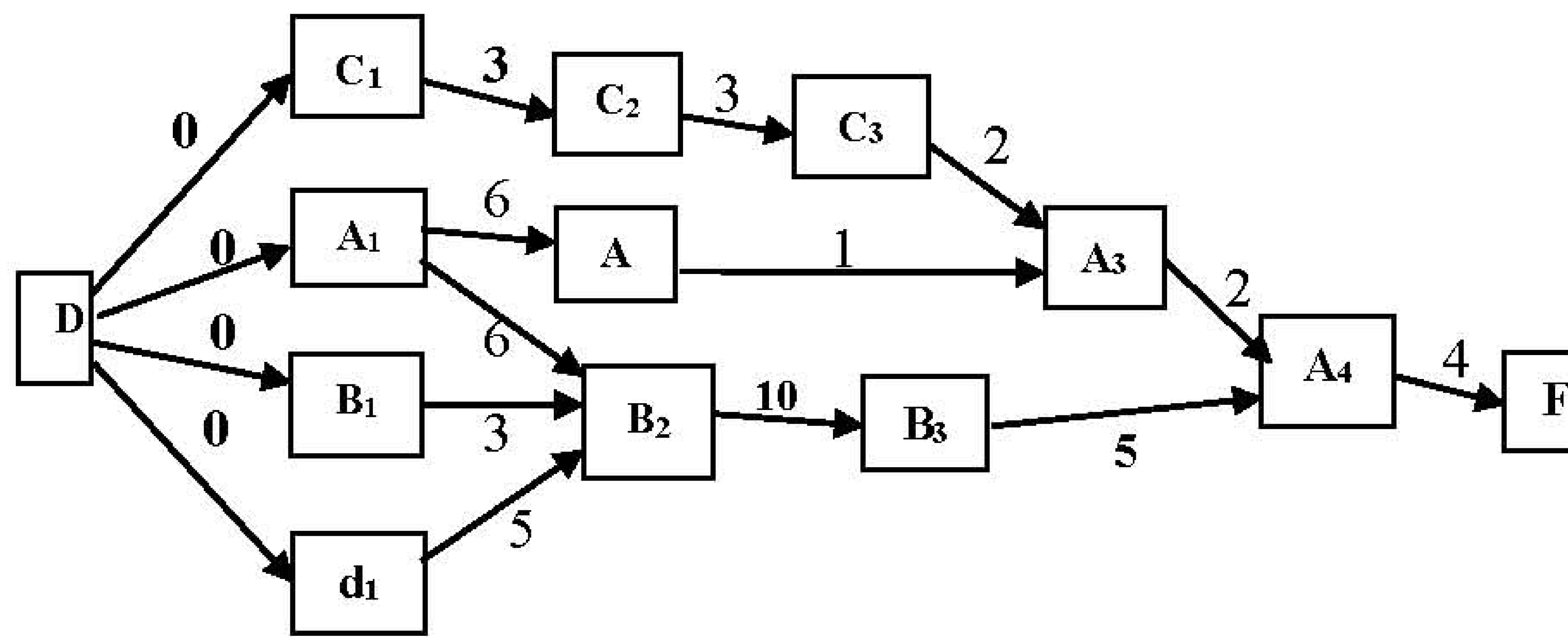
مثال2:

باستعمال معطيات الجدول التالي، المتعلقة بانجاز مشروع معين، كون شبكة تنفيذ المشروع واستخرج مساره الحرج.

النشاط	C_1	A_1	B_1	d_1	C_2	A_2	B_2	C_3	A_3	B_3	A_4
مدة التنفيذ	3	6	3	5	3	1	10	2	2	5	4
البداية المتأخرة	--	--	--	--	C_1	A_1	A_1, B_1, d_1	C_2	A_2, C_3	B_2	A_3, B_3

الحل:

1-تكوين الشبكة:



لحرج:

ت المبكرة:

0	C_1	A_1	0	0	B_1	0	d_1	3	C_2	6	A_2
D:0	0	D:0	0	D:0	0	D:0	0	C_1: 3	0	A_1:6	0

6	C_3	8	A_3	16	B_3	21	A_4	25
C_2: 3	3	A_2: 1 C_3 : 2	6 6	B_2:10	10	A_3:2 B_3 :5	8 16	A_4:

يات المتأخرة:

D	0	11	C_1	A_1	0	B_1	3	d_1	1	C_2	14
110 3 1	C_1:0 A_1:0 B_1:0 d_1:0	14	C_2:3	1 8 6	A_2:6 B_2:6	6	B_2:3	6	B:5	17	C_3:3

B_2	6	C_3	17	A_3	19	B_3	16	A_4	21
16	B_3:10	19	A_3:2	21	J:1	21	A_4:5	25	F:4

ثانيا: تحديد المسار الحرج.

النشاط	A_1	B_1	C_1	d_1	C_2	A_2	B_2	C_3	A_3	B_3	A_4
البداية المبكرة	0	3	11	1	14	18	6	17	19	16	21
البداية المتأخرة	0	0	0	0	3	6	6	6	8	16	21
الوقت الاحتياطي	0	3	11	1	11	12	0	11	11	0	0

النشاطات التي تشكل المسار الحرج هي : A_1–B_2–B_3–A_4 ، بمدة زمنية تساوي **25** أسبوعا.

مخطط GANTT:

وضعه هنري قانت سنة **1861**، هدف هذا المخطط هو توضيح المدد الزمنية لتنفيذ نشاطات المشروع، وبالتالي يسهل التتبع الجيد لتطور تنفيذ المشروع في أي وقت وذلك بمقارنة المنفذ مع المخطط.

يتميز هذا المخطط بسهولة استعماله وخاصة من طرف التقنيين المشرفين على فرق الإنجاز المباشرة. وكذلك تسهيل عملية متابعة تنفيذ المشروع خلال الزمن.

من أهم نقائصه:

- إخفاء الأخطاء المرتكبة في تحليل وتخطيط المشروع.
- لا يظهر المسار الحرج والنشاطات المكونة له والتي يترتب على التأخر في إنجازها، التأخر في تنفيذ المشروع ككل.

- لا يوضح علاقات التتابع في التنفيذ بين النشاطات وأولوية التنفيذ بينها.

تكوين مخطط GANTT:

هذا المخطط يظهر في شكل جدول مقسم إلى خانات عمودية وأفقية، الأولى وتمثل كل منها وحدة زمنية، والثانية تمثل كل منها نشاط معين. يمثل النشاط داخل هذه الخانة الأفقية بمستقيم، طوله يتناسب مع طول المدة الزمنية المحددة لتنفيذه، فبداية المستقيم تشير إلى البداية الزمنية للنشاط، ونهايته –إلى النهاية الزمنية له.

مثال:

معطيات إنجاز مشروع ما يعطيها الجدول التالي، كون مخطط **GANTT** لهذا المشروع ووضح حالة تقدم تنفيذه بعد الشهر الـ **15**.

النشاط	A	B	C	d	E	f
مدة إنجازه المتوقعة	**3**	2	3	5	4	1
مدة إنجازه الفعلية	4	2	3	5	6	1
النشاطات السابقة له مباشرة	--	A	B	C	C	A

	المـــدة (شهر)												
النشاط	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A													
B													
C													
D													
E													
F													

الحل أنه بعد 15 شهرا، كل النشاطات أنجزت في وقتها المحدد، ما عدا النشاطين (**E,A**)، الأول تأخر بشهر
لمدة شهرين.

المراجع:

1- Anderson D.R., Sweeny D., Williams T., an introduction to management science: Quantitative approaches to decision making, Cincinnati s-w.college pub, 2000.

2- Arinal J.C., Les flots dans les graphes, G-V, Paris,1967.

3- Belletante r., mathématique et gestion: Les outils fondamentaux, ellipses, 1995.

4- Baumol w.J., Technique analyse opérationnelle, Dunod, Paris, 1975.

5- Berge C., graphes et hypergraphes, dunod, Paris, 1984.

6- Chein M., Optimisation dans les graphes, CNRS, Univ. Paris IV, 1981.

7- Cullmann G., recherche opérationnelle, théorie et pratique, 1972.

8- Desbazeille G., Exercices et problèmes de recherche opérationnelle, Dunod, 1976.

9- Desplas A., mathématiques de la décision économique, dunod, Paris,1967.

10- Ecoto F., initiation à la recherche opérationnelle, ellipses,1986.

11- Eppen G., Gould F., Quantitative concepts for management: decision making without algorithms, Englewood cliffs, N.J, P.H.I., 1988.

12- Faure C., chemins et flots, ordonnancements,, G-V, 1976.

13- Faure C., Guide de la recherche opérationnelle, Masson, Paris, 1986.

14- Fortet R., Abadie J., mathématiques des programmes économiques, dunod, 1976.

15- Hendrickson C., Tung A., Project management for construction,- Englewood Cliffs, N.J.,P.H,1989.

16- Henry-labordère A., grojnowski M., recherche opérationnelle - Exercices et problèmes avancés, masson, 1976.

17- Huysmans J., The implementation of operations research, N.Y., weley-interscience, 1970.

18 - Kaufmann A., Mathématiques nouvelles pour mieux comprendre la gestion, Dunod, Paris, 1989.

19- Kaufmann A., Faure R., initiation à la recherche opérationnelle, Dunod, 1976.

20- Kelly J.E., Critical Path planning and scheduling: mathematical basis, operations research, 1961, 9, n°.3.

21- Mc Closkey J., Trefethen F., Operations research for management, Baltimore, j.h. University press, 1954-1956.

22- Marchand R., Les méthodes mathématiques modernes dans l'entreprise, E.M.E, Paris,1985.

23- Maurin H., Programmation linéaire appliquée, Technip, 1967.

24- Moder j.j, Project management with **CPM/PERT** and precedence diagramming, N.Y., V.N.R.co, 1983.

25- Roseaux, Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle, Dunod, 2000.

26- Roy B., Algèbre moderne et théorie des graphes, Dunod,1970.

27- Saaty T., Mathematical methods of operations research, N.Y, M.G.H., 1960.

28- Sordet J., les modèles, instruments de décision, dunod, 1971.

29- T intner G., mathématiques et statistiques pour les économistes, dunod, 1970.
30- Thompson G., les mathématiques modernes dans la pratique des affaires, bordas, 1980.
31- Voraz C., Le Pert-cost, E.M.E. Paris,1980.
32- Wagner H.M., Principles of operations research with applications to managerial decisions. Englewood cliffs, N.Y., P.H., 1975.
33- Wiest J.D., Levy F.K., A management guide to PERT/CPM, Englewood Cliffs, N.J., P.H,1969.

الملحق – جدول التوزيع الطبيعي

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0 ,08	0,09
0,0	0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857

2,2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3,0	4986	4987	4987	4988	4988	4989	4989	4989	4990	4990

انجز طبعه على مطابع

ديوان المطبوعات الجامعية

1، الساحة المركزية - بن عكنون -الجزائر